

GELIJKE MONNIKEN, GELIJKE KAPPEN

Kenneth Tjon Soei Sjoë
Peter Kop
Marjolein van Haselen
Donald van As

Dit artikel is tot stand gekomen in samenspraak met Cito en het College voor Toetsen en Examens (CvTE). Het artikel heeft betrekking op de beoordeling van de examens wiskunde A en C. Aan het einde van het artikel wordt de situatie bij wiskunde B beschreven.

Hoewel de examenmakers van wiskunde A en C ervan uitgaan dat alle docenten hun leerlingen leren hun antwoorden wiskundig correct te formuleren, doen hun pupillen dat niet altijd op examens. Uit onder andere de discussies op het forum blijkt dat correctoren fouten in formuleringen soms verschillend beoordelen. Deze verschillen komen ook voor bij het beoordelen van afronden en het gebruik van eenheden, het beschrijven hoe de grafische rekenmachine (de GR) gebruikt is en bij het zogenoemde sprokkelen. Ons doel met dit artikel is om meer helderheid te verschaffen waardoor de verschillen in beoordeling van leerlingenwerk worden verkleind. Alle leerlingen verdienen een gelijkwaardige beoordeling van het CE (Centraal examen).

Een belangrijk uitgangspunt dat in dit stuk meespeelt bij de beoordeling van wiskundig incorrecte formuleringen bij wiskunde A- en C-leerlingen is dat het bij hen gaat om het kunnen gebruiken van wiskunde bij het oplossen van problemen in betekenisvolle contexten. Het wiskundig correct formuleren speelt daarbij een minder belangrijke rol. Vanuit dit perspectief past het de cruciale denkstappen in de redeneringen en berekeningen van de leerling te belonen en incorrecte wiskundige formuleringen niet altijd aan te rekenen. In de correctievoorschriften bij de CE's van wiskunde A en C staan vanaf 2015 drie vakspecifieke regels. Regel 1 en 3 zijn weliswaar niet nieuw, maar worden met ingang van 2015 enigszins aangepast.

Vakspecifieke regels bij wiskunde A/C vwo en wiskunde A havo:

1. Voor elke rekenfout wordt 1 scorepunt in mindering gebracht tot het maximum van het aantal scorepunten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.
2. Als de kandidaat bij de beantwoording van een vraag een notatiefout heeft gemaakt en als gezien kan worden dat dit verder geen invloed op het eindantwoord heeft, wordt hiervoor geen scorepunt in mindering gebracht.
3. De algemene regel 3.6 *geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de grafische rekenmachine (GR) gebruiken. Bij de betreffende vragen geven de kandidaten een toelichting waaruit blijkt hoe zij de GR gebruikt hebben.

* Indien in een antwoord een gevraagde verklaring of uitleg of afleiding of berekening ontbreekt danwel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend tenzij in het beoordelingsmodel anders is aangegeven.

In dit artikel willen wij als de vaststellingscommissie wiskunde havo A en vwo A en C onze ideeën met betrekking tot de interpretatie van deze regels en het correctievoorschrift verduidelijken. Vooraf merken we op dat het correctievoorschrift altijd bindend is. Toch stellen we vast dat er ruimte is voor verschillen in interpretatie. Het blijkt ondoenlijk om bij het formuleren van correctievoorschriften 'alles dicht te timmeren'. Door middel van gerichte voorbeelden wil het CvTE aangeven hoe de correctievoorschriften bedoeld zijn; met andere woorden: wat 'de geest' is waarin het CE gecorrigeerd zou moeten worden. We zullen de afzonderlijke onderwerpen (notatiefouten, afronden, gebruik van eenheden, GR-gebruik beschrijven en sprokkelen) apart toelichten aan de hand van voorbeelden met begeleidend commentaar. Het moge duidelijk zijn dat dit slechts een illustratie is en dat de voorbeelden niet uitputtend zijn.

Notatiefouten

Doel van wiskunde A en C is onder andere dat leerlingen (wiskundige) problemen oplossen en hun oplossing onderbouwen. Correct kunnen formuleren is belangrijk en dient door leerlingen beheerst te worden. Deze leerlingen worden echter niet opgeleid om actief wiskundige notaties te kunnen gebruiken. Een passief gebruik van deze vaardigheid is voldoende. Daarom zijn wij van oordeel dat fouten in wiskundige notaties bij deze leerlingen niet altijd aangerekend moeten worden op het CE; notatiefouten in aanloop naar in essentie volledig juiste antwoorden kunnen zeker geaccepteerd worden. In niet volledig juiste antwoorden zal het soms lastig zijn om te bepalen of de leerling slechts een notatiefout maakt of dat hij een foutieve gedachtegang volgt. Uitgangspunt is dat er geen scorepunten in mindering gebracht moeten worden, als een leerling een notatiefout gemaakt heeft bij de beantwoording van een vraag, terwijl gezien kan worden dat hij correct gehandeld heeft bij de daaropvolgende stappen.

De volgende passages in het leerlingenwerk moeten, hoewel onjuist genoteerd, geen puntenaftrek tot gevolg hebben:

$$1. \quad y = \frac{x^2 - 2x}{2x+1}; \quad y' = \frac{(2x+1)(2x-2) - x^2 - 2x \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2 - 2x - 2 - 2x^2 + 4x}{(2x+1)^2};$$

De leerling verzuimt haakjes te zetten na het tweede '-' teken in de teller van de afgeleide, maar laat in de laatste breuk zien dat hij wel rekent alsof er haakjes staan en daardoor de juiste teller krijgt.

2. De leerling moet het verband geven tussen L en T ($L = 2T$); de leerling noteert echter '2T' of ' $y = 2x$ ' en werkt verder correct met het verband $L = 2T$.

Een bijzondere notatiefout die aanleiding geeft tot discussie tussen correctoren is het 'breien'. Onderstaande voorbeelden van leerlingteksten geven aan dat de specifieke notatiefout 'breien' geen aanleiding is tot scorepuntenaftrek:

3. Een leerling moet opschrijven: $0,27 \cdot 0,13 \cdot 0,11 \cdot 0,09 = 0,0003$ dus 0,03%, maar schrijft $0,27 \cdot 0,13 = 0,03511 \cdot 0,11 = 0,00386 \cdot 0,09 = 0,0003 = 0,03\%$.

4. Moet opschrijven: $g = 9,6^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{9,6} = 1,06$ dus 6%, maar schrijft: $g = 9,6^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{9,6} = 1,06 = 6\%$

5. Moet in de berekening de afgeleide van $\frac{10}{x}$ uitrekenen en schrijft: $y' = \frac{10}{x} = 10x^{-1} = -10x^{-2}$;

hij schrijft dus in de tussenstappen een vergelijking op waarbij functie en afgeleide gelijk zouden zijn.

Zoals eerder aangeven is de achterliggende gedachte dat, 'als gezien kan worden dat de notatiefout verder geen invloed heeft op het eindantwoord', deze niet aangerekend moet worden. Indien dit niet zichtbaar is, zal wel puntenaftrek moeten volgen.

6. Als de afgeleide van $y = \frac{10}{x}$ berekend moet worden

en in het correctievoorschrift is aangegeven dat dit 1 scorepunt waard is, maar de leerling slechts

als eindantwoord $y = \frac{10}{x} = 10x^{-1} = -10x^{-2}$

opgeschreven heeft, dan kan dit scorepunt hier niet gegeven worden omdat onduidelijk is of de leerling inderdaad de afgeleide berekend heeft. Hier gaat het om een eindantwoord dus er is geen vervolg waaruit blijkt dat bedoeld is: $y' = -10x^{-2}$.

Afronden

Uit de syllabus blijkt dat leerlingen geen kennis van significantie hoeven te hebben. Daarom zal er in het algemeen genoeg worden genomen met antwoorden die nauwkeuriger zijn. Er zijn echter enige situaties waarin wel eisen worden gesteld aan de nauwkeurigheid van het antwoord. Soms is voorgeschreven hoe nauwkeurig het antwoord gegeven moet worden (bijvoorbeeld bij 'Rond je antwoord af op honderdtallen' of 'Bereken in 2 decimalen nauwkeurig ...'). In deze gevallen is het duidelijk dat als niet voldaan wordt aan dit voorschrift er scorepuntenaftrek plaatsvindt.

Indien echter geen nauwkeurigheid van het antwoord voorgeschreven is, bepaalt vaak de context de nauwkeurigheid. Een geldbedrag voor een *afzonderlijk* product kan bijvoorbeeld wel 23,15 euro zijn (of 23 euro) maar niet 23,1467 euro. Het aantal personen in een autobus moet geheel zijn en niet 53,7. Hier dwingt de context tot afronden op twee decimalen, respectievelijk gehelen. Ook hier moet(en) er (een) scorepunt(en) in mindering gebracht worden, als de kandidaat het antwoord niet met de juiste nauwkeurigheid gegeven heeft.

Een bijzondere situatie doet zich voor bij vragen waarbij er naar boven (of naar beneden) móet worden afgerond. In dit soort situaties kan 'gewoon' afronden leiden tot een situatie waarin niet aan het gestelde voldaan is.

1. In het examen vwo wiskunde A 2013 tijdvak 1 vraag 19 is gevraagd: hoe ver moet een atlete *ten minste* springen om een bepaald aantal punten te halen.

Daarvoor moet deze vergelijking

$$3827 = 0,188807(X - 210)^{1,41}$$

met de GR opgelost worden: dat geeft een waarde voor X van

1343,696267 (cm) en dus als antwoord 13,44 meter. Antwoorden als 13,437 meter of 13,436963 meter zijn ook goed omdat die naar boven zijn afgerond, maar

een antwoord als 13,43696 meter is fout omdat hier naar beneden is afgerond, ondanks de toevoeging (of nauwkeuriger) in het correctievoorschrift (CV).

De vraagstelling (*ten minste*) dwingt hier dat er 'naar boven afgerond' moet worden, ongeacht de gekozen nauwkeurigheid

2. Nog duidelijker is als bijvoorbeeld de vergelijking $2770 = 0,188807(X - 210)^{1,41}$ opgelost had moeten worden waarbij de vraagstelling dezelfde was als hierboven. Dan is een juist antwoord 1112 (de GR geeft 1111,44111); het antwoord 1111 is niet juist en zal geen scorepunten opleveren aangezien er naar boven afgerond moest worden.

Soms zal een leerling moeten aangeven dat zijn antwoord afwijkt van triviale uitkomsten. Bij kansrekening zal de leerling bijvoorbeeld duidelijk moeten aangeven dat zijn antwoord afwijkt van 0 of 1 en bij exponentiële functies dat de groeifactor afwijkt van 1. Indien geen afronding is

voorgeschreven, zal een kans van $\left(\frac{1}{6}\right)^5$ dus als meest

onnauwkeurige antwoord 0,0001 hebben en niet 0,000. Bij berekeningen met exponentiële functies zal een afronding van 1,0043 naar 1,00 of een afronding van 0,0002 naar 0,000 niet aanvaardbaar zijn. Als uit de context blijkt dat de berekeningen en antwoorden overdreven nauwkeurig maar niet fout zijn, zal dat niet tot scorepuntenaftrek moeten leiden, hoewel we hopen dat in het onderwijs afwegingen met betrekking tot afronding aan bod komen.

1. Bij een vraag naar het jaarlijkse groeipercentage in een situatie waarbij het aantal van 1000 tot 9600 groeit in een periode van 42 jaar, kan een leerling een antwoord geven als 5,5327877%.
2. Een kans ter grootte van $\left(\frac{5}{6}\right)^4$ zou wellicht afgerond

genoteerd kunnen worden als 0,4822530864.

In beide voorbeelden zijn de antwoorden overdreven nauwkeurig, maar niet fout, gezien de context en leiden daarmee dus niet tot scorepuntenaftrek.

Gebruik van eenheden

Met betrekking tot het gebruik van eenheden zullen we hier drie gevallen bespreken:

1. Indien in de vraag de eenheid vermeld wordt, hoeft deze niet in het antwoord herhaald te worden. Bijvoorbeeld bij een vraag als: Bereken hoeveel ton ...; dan zal in het correctievoorschrift (CV) de eenheid tussen haakjes staan (in dit geval 89.000 (ton)) en dus moet het antwoord 89.000 goed worden gerekend. Merk op dat antwoorden als 8.900.000 of 8.900.000 kg fout zijn en dus tot aftrek van scorepunten leiden. De vraag was immers: hoeveel ton!
2. Indien in de stam slechts één bepaalde eenheid gebruikt wordt en er geen eenheid in de vraag vermeld wordt, dan hoeft de eenheid niet in het antwoord herhaald te worden. Bijvoorbeeld: in havo wis A 2013 I vraag 18 staat slechts de eenheid 'cm'. In de vraag wordt geen eenheid vermeld. In het CV staat de eenheid tussen haakjes. Die mag dus in het antwoord weggelaten worden, omdat er geen misverstand kan bestaan over de bedoelde eenheid (6,1 (cm)). Als de leerling in het antwoord een andere eenheid gebruikt, moet deze vermeld worden. Bij de genoemde vraag is naast 6,1 (cm) dan ook 0,061 meter (natuurlijk) goed, maar 0,061 niet.
3. Indien in de stam meerdere eenheden worden gebruikt en in de vraag geen eenheid wordt vermeld, moet het antwoord met een eenheid worden gegeven.

Wiskunde B

- Bij 'Vakspecifieke regels bij wiskunde A/C vwo en wiskunde A havo'

Voor wiskunde B geldt

1. Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt 1 scorepunt in mindering gebracht tot het maximum van het aantal scorepunten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.
 2. De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij kandidaten de grafische rekenmachine gebruiken. Bij de betreffende vragen geven de kandidaten een toelichting waaruit blijkt hoe zij de GR hebben gebruikt.
- Bij 'Notatiefouten'
- Bij een wiskunde B-examen moet de leerling blijken antwoorden en bewijsvoeringen door middel van een zorgvuldig gebruik van notaties, symboliek en een heldere redeneertrant verkregen te hebben. Daarom geldt de nieuwe vakspecifieke regel m.b.t. notatiefouten, zoals geformuleerd voor wiskunde A/C, niet voor wiskunde B. Bij wiskunde B dienen notatiefouten (verschrijvingen) dus aangerekend te worden zoals beschreven in vakspecifieke regel 1.
- Bij 'Afronden'
- Voor wiskunde B geldt t.a.v. het afronden hetzelfde als bij wiskunde A/C.
- Bij 'Gebruik van eenheden'
- Voor wiskunde B geldt t.a.v. het gebruik van eenheden hetzelfde als bij wiskunde A/C.
- Bij 'Beschrijving van het gebruik van de GR'
- Voor wiskunde B geldt t.a.v. de beschrijving van het gebruik van de GR hetzelfde als bij wiskunde A/C.
- Bij 'Sprokkelen'
- Voor wiskunde B geldt t.a.v. sprokkelen hetzelfde als bij wiskunde A/C, met als toevoeging bij III: T.a.v. opgaven in de VWO-examens waarin een bewijsvoering wordt gevraagd, kunnen slechts scorepunten worden toegekend als de kandidaat de logische volgorde van de stappen in de bewijsvoering heeft aangehouden.

Beschrijving van het gebruik van de GR

De bovengenoemde vakspecifieke regel 3 vertelt dat de kandidaat toe moet lichten hoe hij de GR gebruikt. Sinds enige tijd gebruiken we in het CV de omschrijving 'beschrijven hoe ... opgelost kan worden met GR'. De laatste jaren verdwijnt in veel gevallen zelfs de toevoeging 'met de GR' en staat er bijvoorbeeld in het CV bij het oplossen van vergelijkingen slechts 'beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden'. Vaak gaan we er dan wel vanuit dat de GR ingezet zal worden. Langzamerhand lijkt de GR een vanzelfsprekend stuk gereedschap voor leerlingen te zijn geworden. Dat brengt met zich mee dat de uitgebreide omschrijvingen hoe de GR ingezet kan worden achterwege kunnen blijven. Een verwijzing als

'equa' (bij Casio) of 'solver' of 'snijpunt grafieken' (bij TI) lijkt voldoende. Bij de normale verdeling is *Ncd* (Casio) of *normalcdf* (TI) voldoende. Dit des te meer omdat deze onderdelen van het antwoord in het algemeen niet meer dan 1 punt waard zijn. Algemeen blijft gelden dat een leerling zijn antwoorden moet toelichten en dat hij dus globaal moet beschrijven hoe hij de GR gebruikt en dus niet kan volstaan met de verwijzing 'met de GR'.

Sprokkelen

Onder sprokkelen verstaan we het oneigenlijk toekennen/vergaren van scorepunten. Het bolletjesmodel dient op de volgende wijze gebruikt te worden om sprokkelen te voorkomen én om er voor te zorgen dat kandidaten geen punten onthouden worden waar zij recht op hebben.

- I. Als een leerling een vraag goed beantwoordt en voldoende toelichting geeft, krijgt hij alle scorepunten voor de betreffende vraag. De onderverdeling van de scorepunten in het CV is niet van belang.
- II. Als een leerling ergens in het oplossingsproces dat in het CV beschreven wordt, een kleine (reken)fout maakt, *dan wordt hier conform vakspecifieke regel 1 een scorepunt voor in mindering gebracht, tenzij het bolletjesmodel anders aangeeft.*
- III. Als een leerling ergens halverwege afhaakt in een oplossingsproces dat in het CV beschreven wordt, wordt de onderverdeling (het bolletjesmodel) gebruikt om vast te stellen hoeveel scorepunten een leerling verdient heeft. Het bolletjesmodel geeft dus het aantal scorepunten 'indien je niet verder komt dan hier, krijg je ... scorepunten'
- IV. Als een leerling zonder enige onderbouwing een aanname doet om daarmee antwoord te kunnen geven op de vraag zullen na de aanname voor dit onderdeel in het algemeen geen verdere scorepunten worden toegekend. (Zie V. en voorbeeld 1 hieronder.)
- V. Als een leerling ergens in het oplossingsproces dat in het CV beschreven wordt, een fundamentele fout (bijvoorbeeld een verkeerd model) of een grote rekenfout maakt, waardoor de vraag (essentieel) verandert, dan helpt het bolletjesmodel van het CV om vast te stellen hoeveel punten de leerling tot dan toe behaald heeft. Voor het deel dat na de fundamentele fout komt, moet gekeken worden of het probleem niet te sterk vereenvoudigd wordt (zie voorbeeld 3 hieronder) en of er verder gewerkt wordt in de geest van de oplossing van het probleem; er moeten vergelijkbare handelingen worden verricht. De beoordeling geschiedt verder op vakinhoudelijke argumenten (zie voorbeeld 4 hieronder). Als na de fundamentele fout slechts

het antwoord volgt, kunnen geen scorepunten meer worden toegekend (zie voorbeeld 2).

We schetsen een aantal voorbeelden waarin duidelijk aan te geven is 'hoe te handelen', maar realiseren ons dat dit steeds per situatie bekeken moet worden. Voorbeelden waarbij geen punten meer toegekend moeten worden:

1. Uit vwo wiskunde C 2013 tijdvak 1 pilot vraag 1: hier wordt gevraagd of de relatieve toename van het aandeel van armen en handen groter is dan de relatieve toename van het aandeel van benen en voeten. Om de toenamen (de percentages) te berekenen, moet er een aantal stappen gezet worden. Een leerling voert geen enkele berekening uit, maar doet een aanname en schrijft slechts op 'stel dat de toename bij armen en handen 21% is en die bij benen en voeten 25%; dan zou het aandeel van benen en voeten relatief het meest zijn toegenomen'. Het laatste punt van het CV (dus het aandeel van de lichaamsoppervlakte van benen en voeten is relatief het meest toegenomen) wordt niet toegekend. In dit voorbeeld wordt de probleemstelling van de context niet gebruikt, maar wordt er slechts op basis van aannames, los van de context, een variant van een regel van het correctievoorschrift opgeschreven. Honoreren hiervan zou sprokkelen zijn en dus mogen er na de aannames geen scorepunten meer worden toegekend.

Voorbeelden bij fundamentele fouten.

2. Stel, de volgende vraag wordt gesteld: iemand zet 10000 euro op een spaarrekening waar jaarlijks 5% rente op wordt vergoed. Volgens hem betekent dit dat het ingezette bedrag na 20 jaar precies is verdubbeld. Ga met een berekening na of deze bewering klopt. De leerling zou als antwoord moeten geven: Het bedrag na 20 jaar is $10000 \cdot 1,05^{20} = 26533$ (2 punten). Dit is meer dan 2 maal 10.000, dus de bewering is onjuist (1 punt). Hij schrijft: '5% per jaar is gelijk aan $20 \cdot 5\% = 100\%$ in 20 jaar. Het bedrag is na 20 jaar dus 20000, dus de bewering is juist.' Het laatste punt mag hier nu niet toegekend worden, dus deze leerling krijgt geen punten voor deze vraag.
3. Er wordt gevraagd aan te tonen dat de afgeleide van

$$L = \frac{4T - 30}{T + 2} \text{ steeds positief is. Het CV geeft voor}$$

$$L' = \frac{38}{(T + 2)^2} \text{ 2 punten en voor de redenering 'teller}$$

en noemer zijn positief dus L' is positief' 1 punt. Een

leerling die opschrijft dat $L' = \frac{4}{1} = 4$ en dat dus

L' positief is, krijgt geen punten. Ook het laatste punt kan na de fundamentele fout niet gegeven worden.

**'CORRECT KUNNEN FORMULEREN IS
BELANGRIJK EN DIENT DOOR LEERLINGEN
BEHEERST TE WORDEN'**

4. In vwo wiskunde A 2012 tijdvak 1 pilot was vraag 19 de korte onderzoeksvraag met 8 punten. De vraag was: 'Onderzoek, uitgaande van bovengenoemde trendmatige ontwikkelingen, in welk jaar de totale perenopbrengst voor het eerst groter zal zijn dan de totale appelopbrengst'.
- op basis van de gegevens moeten voor zowel appels als peren lineaire formules gemaakt worden voor de *opbrengst per hectare per jaar* en voor de *totale oppervlakte in hectare*. (Stappen 1 en 2 in het CV);
 - hierna moet voor zowel appels als peren een formule voor de *totale opbrengst per jaar* gemaakt worden. (Stappen 3 en 4 in het CV);
 - daarna moet onderzocht worden in welk jaar de totale perenopbrengst voor het eerst groter is dan de totale appelopbrengst. (Stappen 5 tot en met 8 in het CV).

Als een leerling in de stappen 1 tot en met 4 een fundamentele fout maakt en met exponentiële formules (in plaats van lineaire formules) werkt, moet de rest van de uitwerking op wiskundig inhoudelijke argumenten beoordeeld worden. Als de leerling nu vervolgens zonder fouten verder doorwerkt, zal hij nog een aantal scorepunten kunnen krijgen, omdat verder gewerkt is in de geest van de vraag en er geen verregaande vereenvoudiging opgetreden is. Dus ondanks de fundamentele fout in het begin is er geen sprake van sprokkelen als er voor de vervolgstappen nog punten worden toegekend. Met deze voorbeelden zijn de problemen van beoordelen niet opgelost. In een aantal gevallen zal het lastig blijven om te beoordelen of het bolletjesmodel van het CV gevolgd kan worden of dat er sprake is van sprokkelen.

Tot slot

We hebben voor wiskundige notaties, afronden, het gebruik van eenheden, beschrijving van de GR en sprokkelen, door middel van voorbeelden geschetst in welke situaties wel en in welke geen scorepunten gegeven kunnen worden, indien het CV hier geen uitspraak over doet. Met deze voorbeelden zijn de problemen van beoordelen niet opgelost. Helemaal eenduidig kan het CV niet altijd zijn. Ons doel met dit artikel is om meer helderheid te verschaffen waardoor de verschillen in beoordeling van leerlingenwerk worden verkleind.