College voor Examens

WISKUNDE C
VWO

Syllabus centraal examen 2012

November 2010

Verantwoording:

Inhoud

Voorwoord **3**

1. Het centraal examen vwo **4**

1.1 Hulpmiddelen 4
1.2 Significantie 4
1.3 Algebraïsche vaardigheden 4
1.4 Verdeling examinering CE/SE 4

2. Specificatie van de globale eindtermen voor het CE **5**

Domein A: Vaardigheden 5
Domein Bg: Functies en grafieken 6
Domein Cg: Discrete analyse 6
Domein Eg: Combinatoriek en kansrekening 7
Domein Fa: Statistiek en kansrekening 8

3. Algebra: specifieke en algemene vaardigheden **9**

Bijlage 1: Examenprogramma Wiskunde C vwo **20**

Bijlage 2: Algebra in het vwo; het onderscheid tussen A, B en C **23**

Bijlage 3: Lijst van formules die in het examen wordt opgenomen **26**

Voorwoord

De minister heeft de examenprogramma's op hoofdlijnen vastgesteld. In het examenprogramma zijn de exameneenheden aangewezen waarover het centraal examen (CE) zich uitstrekt: het CE-deel van het examenprogramma. Het examenprogramma geldt tot nader orde.

Het College voor Examens (CvE - voorheen CEVO[1]) geeft in een syllabus, die in beginsel jaarlijks verschijnt, een toelichting op het CE-deel van het examenprogramma. Behalve een beschrijving van de exameneisen voor een centraal examen kan de syllabus verdere informatie over het centraal examen bevatten, bijvoorbeeld over een of meer van de volgende onderwerpen: specificaties van examenstof, begrippenlijsten, bekend veronderstelde onderdelen van domeinen of exameneenheden die verplicht zijn op het schoolexamen, bekend veronderstelde voorkennis uit de onderbouw, bijzondere vormen van examinering (zoals computerexamens), voorbeeldopgaven, toelichting op de vraagstelling, toegestane hulpmiddelen.

Ten aanzien van de syllabus is nog het volgende op te merken. De functie ervan is een leraar in staat te stellen zich een goed beeld te vormen van wat in het centraal examen wel en niet gevraagd kan worden. Naar zijn aard is een syllabus dus niet een volledig gesloten en afgebakende beschrijving van alles wat op een examen zou kunnen voorkomen. Het is mogelijk, al zal dat maar in beperkte mate voorkomen, dat op een CE ook iets aan de orde komt dat niet met zo veel woorden in deze syllabus staat, maar dat naar het algemeen gevoelen in het verlengde daarvan ligt.

Een syllabus is zodoende een hulpmiddel voor degenen die anderen of zichzelf op een centraal examen voorbereiden. Een syllabus kan ook behulpzaam zijn voor de producenten van leermiddelen en voor nascholingsinstanties. De syllabus is *niet* van belang voor het schoolexamen. Daarvoor zijn door de SLO handreikingen geproduceerd die niet in deze uitgave zijn opgenomen.

Deze syllabus geldt voor het examenjaar 2012. Syllabi van eerdere jaren zijn niet meer geldig en kunnen van deze versie afwijken. Voor het examenjaar 2013 wordt een nieuwe syllabus vastgesteld. Het CvE publiceert uitsluitend digitale versies van de syllabi. Dit gebeurt via Examenblad.nl (www.examenblad.nl), de officiële website voor de examens in het voortgezet onderwijs.
In de syllabi 2012 zijn de wijzigingen ten opzichte van de vorige syllabus voor het examenjaar 2011 duidelijk zichtbaar. Deze veranderingen zijn geel gemarkeerd. Er zijn diverse vakken waarbij de syllabus 2012 geen inhoudelijke veranderingen heeft ondergaan.

Een syllabus kan zo nodig ook tussentijds worden aangepast, bijvoorbeeld als een in de syllabus beschreven situatie feitelijk veranderd is. De aan een centraal examen voorafgaande Septembermededeling is dan het moment waarop dergelijke veranderingen bekendgemaakt worden. Kijkt u voor alle zekerheid jaarlijks in september op Examenblad.nl.

Het CvE stelt het aantal en de tijdsduur van de toetsen van het centraal examen vast en de wijze waarop het centraal examen wordt afgenomen. Deze vaststelling wordt gepubliceerd in het rooster voor de centrale examens en in de Septembermededeling.

Voor opmerkingen over syllabi houdt het CvE zich steeds aanbevolen. U kunt die zenden aan info@cve.nl of aan CvE, Postbus 315, 3500 AH Utrecht.

De voorzitter van het College voor Examens,
Drs. H.W. Laan

[1] Op 1 oktober 2009 is de CEVO (Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven) opgegaan in het CvE. De CEVO bestaat niet meer, maar besluiten van de CEVO, onder meer over de syllabi, blijven van kracht zolang deze niet herzien zijn door het CvE.

1. Het centraal examen vwo

1.1 Hulpmiddelen

Raadpleeg hiervoor het Examenblad, www.examenblad.nl.
In bijlage 3 van deze syllabus is een lijst opgenomen met formules die op bladzijde 2 van het examen zal worden afgedrukt.

1.2 Significantie

Er wordt van kandidaten bij wiskunde C niet verlangd dat zij kennis hebben van regels voor het aantal significante cijfers. Daarom zal bij vragen op het centraal examen worden aangegeven in welke nauwkeurigheid een antwoord dient te worden gegeven of er zal genoegen worden genomen met antwoorden in uiteenlopende aantallen decimalen.

1.3 Algebraïsche vaardigheden

Hoewel de grafische rekenmachine (GR) een krachtig hulpmiddel is, ook bij het oplossen van vergelijkingen, dient de kandidaat ook algebraïsche vaardigheden te beheersen. Zie subdomein A5 en een uitgebreide toelichting daarop in hoofdstuk 3.

1.4 Verdeling examinering CE/SE

Het centraal examen heeft betrekking op de subdomeinen A5, Bg1, Bg2, Cg1, Eg1, Eg2, Eg3, Eg4 en Fa3, in combinatie met de vaardigheden uit de subdomeinen A1, A2 en A3.

In de onderstaande tabel is weergegeven hoe de subdomeinen over het CE en SE verdeeld worden:

Domein	subdomein	in CE	moet in SE	mag in SE
A Vaardigheden	A1: Informatievaardigheden	X	X	
	A2: Onderzoeksvaardigheden	X	X	
	A3: Technisch-instrumentele vaardigheden	X	X	
	A4: Oriëntatie op studie en beroep		X	
	A5: Algebraïsche vaardigheden	X	X	
Bg Functies en grafieken	Bg1: Standaardfuncties	X		X
	Bg2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden	X		X
Cg Discrete analyse	Cg1: Veranderingen	X		X
	Cg2: Rijen en recurrente betrekkingen		X	
Eg Combinatoriek en kansrekening	Eg1: Combinatoriek	X		X
	Eg2: Kansen	X		X
	Eg3: Rekenen met kansen	X		X
	Eg4: Speciale discrete verdelingen	X		X
Ea Grafen en matrices	Ea1: Grafen		X	
	Ea2: Matrices		X	
Fa Statistiek en kansrekening	Fa1: Populatie en steekproef		X	
	Fa2: Ordenen, verwerken en samenvatten van statistische gegevens		X	
	Fa3: Kansverdelingen	X		X
G Keuzeonderwerpen			X	

2. Specificatie van de globale eindtermen voor het CE

In dit hoofdstuk worden de globale eindtermen uit het examenprogramma voor 2007 voor het Centraal Examen (CE) gespecificeerd. Een globale formulering van eindtermen van alle subdomeinen (het examenprogramma) staat in bijlage 1.

Domein A: Vaardigheden

Subdomein A1: Informatievaardigheden

1. De kandidaat kan, mede met behulp van ICT, informatie verwerven, selecteren, verwerken, beoordelen en presenteren.

Specificatie

De kandidaat kan:

1.1 artikelen of berichten uit (nieuws)media of vakliteratuur waarin wiskundige presentaties, redeneringen of berekeningen voorkomen, kritisch analyseren.
1.2 informatie verwerven en selecteren uit schriftelijke, mondelinge en audiovisuele bronnen, mede met behulp van ICT.
1.3 benodigde gegevens halen en interpreteren uit grafieken, tekeningen, simulaties, schema's, diagrammen en tabellen, mede met behulp van ICT.
1.4 gegevens weergeven in grafieken, tekeningen, schema's, diagrammen en tabellen, mede met behulp van ICT.
1.5 hoofd- en bijzaken onderscheiden.
1.6 feiten met bronnen verantwoorden.
1.7 informatie analyseren, schematiseren en structureren.
1.8 de betrouwbaarheid beoordelen van informatie en de waarde daarvan vaststellen voor het op te lossen probleem of te maken ontwerp.

Subdomein A2: Onderzoeksvaardigheden

2. De kandidaat kan een gegeven probleemsituatie inventariseren, vertalen in een wiskundig model, binnen dat model wiskundige oplostechnieken hanteren en de gevonden oplossingen betekenis geven in de context.

Specificatie

De kandidaat kan:

2.1 logische relaties tussen gegevens, beweringen en resultaten aanbrengen en beoordelen en relevante gegevens scheiden van minder relevante gegevens.
2.2 gegevens met elkaar en met de probleemstelling in verband brengen, op grond daarvan een passende aanpak kiezen en deze zo mogelijk opsplitsen in deeltaken.
2.3 in een tekst verstrekte gegevens doelmatig weergeven in een geschikte wiskundige representatie (model).
2.4 vaststellen of een gekozen model voldoet en, indien nodig, een bijstelling hiervan suggereren.
2.5 vaststellen of er aanvullende gegevens nodig zijn en zo ja, welke.
2.6 onderzoeken in hoeverre het model bijgesteld moet worden ten gevolge van wijzigingen in de gegevens.
2.7 een bij het model passende wiskundige oplossingsmethode correct uitvoeren.
2.8 resultaten betekenis geven in de context en binnen die context kritisch analyseren.
2.9 de nauwkeurigheid van de gegevens of werkwijzen betrekken bij de beoordeling van het eindresultaat.
2.10 reflecteren op de gemaakte keuzen voor representatie, werkwijze, oplossingsproces en resultaten en deze onder woorden brengen.

Subdomein A3: Technisch-instrumentele vaardigheden

3. De kandidaat kan bij raadplegen, verkennen en presenteren van wiskundige informatie en bij uitvoeren van wiskundige bewerkingen en redeneringen gebruik maken van toepassingen van ICT.

Subdomein A5: Algebraïsche vaardigheden

5. De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige en algebraïsche vaardigheden en formules, heeft daar inzicht in en kan de bewerkingen uitvoeren met, maar ook zonder, gebruik van ICT-middelen zoals de grafische rekenmachine.

Specificatie
De kaders voor dit subdomein worden geschetst in hoofdstuk 3.

Domein Bg: Functies en grafieken

Subdomein Bg1: Standaardfuncties

6. De kandidaat kan grafieken tekenen en herkennen van machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies en van die verschillende typen functies de karakteristieke eigenschappen benoemen.

Specificatie
De kandidaat kan:

6.1 grafieken tekenen van machtsfuncties met rationale exponenten en daarbij de begrippen domein, bereik, stijgen, dalen en asymptotisch gedrag hanteren.
6.2 grafieken tekenen van exponentiële functies van het type $f(x) = a^x$ en hun inverse functies $f(x) = {}^{a}\log x$ (niet het getal *e* als grondtal) en daarbij de begrippen domein, bereik, stijgen, dalen en asymptotisch gedrag hanteren.

Subdomein Bg2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden

7. De kandidaat kan functievoorschriften opstellen en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen en vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met behulp van numerieke, grafische en algebraïsche methoden.

Specificatie
De kandidaat kan:

7.1 een in de context beschreven samenhang vertalen in een functievoorschrift.
7.2 op grafieken transformaties uitvoeren als verschuiven en rekken en de samenhang met de bijbehorende verandering van het functievoorschrift beschrijven.
7.3 functies combineren (optellen, aftrekken, schakelen) en de samenhang met de bijbehorende grafieken beschrijven.
7.4 vergelijkingen oplossen met numerieke, grafische of elementair-algebraïsche methoden.
7.5 de rekenregels voor machten en logaritmen (inclusief grondtalverandering) gebruiken.
7.6 gebruik maken van logaritmische schaalverdelingen.
7.7 ongelijkheden oplossen met de grafische methode.

Domein Cg: Discrete analyse

Subdomein Cg1: Veranderingen

8. De kandidaat kan het veranderingsgedrag van grafieken en functies relateren aan differentiequotiënten, toenamediagrammen en hellinggrafieken en daarbij een relatie leggen met contexten.

Specificatie
De kandidaat kan:

8.1 vaststellen op welke intervallen er sprake is van een constant, een stijgend of een dalend verloop van de grafiek van een functie.
8.2 vaststellen of een stijging/daling toenemend of afnemend is.
8.3 vaststellen of er minima en maxima zijn en uit een grafiek aflezen hoe groot die zijn.
8.4 veranderingen beschrijven met behulp van differenties, bijvoorbeeld Δx.
8.5 bij een gegeven functie of grafiek een toenamediagram tekenen en daaruit conclusies trekken.
8.6 veranderingen beschrijven en vergelijken met behulp van differentiequotiënten.
8.7 differentiequotiënten berekenen als een functie gegeven is door een formule of grafiek.

8.8 differentiequotiënten interpreteren als maat voor de gemiddelde verandering op een interval en als helling van een koorde.
8.9 bij afnemende stapgrootte differentiequotiënten interpreteren als benadering van de helling (steilheid) van de grafiek in een bepaald punt.
8.10 van een gegeven grafiek de bijbehorende hellinggrafiek globaal beschrijven en met een computer of GR numeriek benaderen.
8.11 uit een gegeven hellinggrafiek het verloop van de oorspronkelijke grafiek afleiden.
8.12 relaties leggen tussen contexten, bijbehorende formules of functies en veranderingsgedrag.

Domein Eg: Combinatoriek en kansrekening

Subdomein Eg1: Combinatoriek

10. De kandidaat kan bij telproblemen de situatie visualiseren met een schema, diagram en rooster en combinatorische berekeningen uitvoeren.

Specificatie

De kandidaat kan:

10.1 naar aanleiding van een tekst voor een telprobleem een geschikte visualisatie tekenen zoals een boomdiagram, een wegendiagram of een rooster.
10.2 bij telproblemen vaststellen is of er sprake is van rangschikken met herhaling of van rangschikken zonder herhaling.
10.3 bij telproblemen vaststellen of gebruik gemaakt mag worden van de vermenigvuldigregel op grond van onafhankelijkheid.
10.4 het aantal kortste routes in een rooster berekenen.
10.5 het aantal permutaties van k uit n berekenen.
10.6 het aantal combinaties van k uit n berekenen.

Subdomein Eg2: Kansen

11. De kandidaat kan toevalsexperimenten vertalen in een kansmodel, de begrippen onafhankelijke gebeurtenissen en voorwaardelijke kansen hanteren en kansen berekenen op basis van een kansexperiment en op basis van symmetrie en combinatoriek.

Specificatie

De kandidaat kan:

11.1 bij toevalsexperimenten de begrippen uitkomst, uitkomstenverzameling, gebeurtenis, elementaire gebeurtenis, onmogelijke gebeurtenis, elkaar uitsluitende gebeurtenissen hanteren.
11.2 empirische kansen berekenen op grond van waarnemingen verkregen door het herhaald uitvoeren van een toevalsexperiment of simulatie.
11.3 nagaan of verondersteld mag worden dat de elementen van een uitkomstenverzameling even waarschijnlijk zijn (symmetrische kansruimte).
11.4 een toevalsexperiment vertalen naar het model trekken van balletjes uit een vaas, al dan niet met teruglegging en al dan niet rekening houdend met de trekkingsvolgorde.
11.5 combinatorische aspecten herkennen bij het tellen van het aantal elementen van een uitkomstenverzameling en bij het berekenen van kansen.
11.6 de overgang beschrijven van empirische kansen naar kansen vanuit een intuïtief begrip van de wet van de grote aantallen.
11.7 kansen berekenen op grond van symmetrie-veronderstellingen en systematisch tellen.
11.8 de begrippen onafhankelijke gebeurtenissen en voorwaardelijke kans hanteren voor symmetrische en niet-symmetrische kansruimten.

Subdomein Eg3: Rekenen met kansen

12. De kandidaat kan bij discrete toevalsvariabelen het begrip onafhankelijkheid hanteren, kansen berekenen met behulp van somregel, complementregel en productregel en van een discrete toevalsvariabele de verwachtingswaarde berekenen.

Specificatie

De kandidaat kan:

12.1 kansen berekenen door gebruik te maken van de somregel en de complementregel.

12.2 kansen berekenen door gebruik te maken van de productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen.
12.3 bij een toevalsexperiment discrete toevalsvariabelen gebruiken en interpreteren.
12.4 de waardenverzameling van een discrete toevalsvariabele (in eenvoudige gevallen met de bijbehorende kansverdeling) beschrijven.
12.5 het begrip onafhankelijkheid voor twee of meer discrete toevalsvariabelen beschrijven.
12.6 voor een discrete toevalsvariabele met gegeven kansverdeling de verwachting berekenen en interpreteren.
12.7 de regel "verwachting van de som = som van de verwachtingen" hanteren.

Subdomein Eg4: Speciale discrete verdelingen

13. De kandidaat kan vaststellen of een toevalsexperiment kan worden vertaald naar een uniforme discrete verdeling of een binomiale kansverdeling en binnen die verdelingen kansen en verwachtingen berekenen.

Specificatie

De kandidaat kan:

13.1 vaststellen of een kansexperiment vertaald kan worden naar een uniforme discrete verdeling.
13.2 bij een uniforme discrete verdeling kansen berekenen en de verwachting van een uniform verdeelde toevalsvariabele berekenen.
13.3 vaststellen of een kansexperiment vertaald kan worden naar het model van de binomiale verdeling.
13.4 een binomiaal verdeelde toevalsvariabele opvatten als de som van onafhankelijke Bernoulli-toevalsvariabelen.
13.5 de binomiale kansverdeling beschrijven met behulp van het binomium van Newton.
13.6 bij een binomiale verdeling kansen berekenen en de verwachting van een binomiaal verdeelde toevalsvariabele berekenen.

Domein Fa: Statistiek en kansrekening

Subdomein Fa3: Kansverdelingen

18. De kandidaat kan het binomiale en het (standaard-)normale verdelingsmodel gebruiken voor het berekenen van kansen, relatieve frequenties, grenswaarden, gemiddelden en standaardafwijkingen van discrete en continue verdelingen.

Specificatie

De kandidaat kan:

18.1 het model van de normale verdeling beschrijven.
18.2 in voorkomende gevallen de normale verdeling gebruiken als model voor de frequentieverdeling van een continue grootheid.
18.3 het gemiddelde en de standaardafwijking gebruiken als karakteristieken van een normale verdeling, inclusief de twee vuistregels voor het percentage afwijkingen van het gemiddelde in relatie tot de standaardafwijking.
18.4 binnen een normale verdelingsmodel relatieve frequenties, kansen, grenswaarden, gemiddelde of standaardafwijking berekenen.
18.5 gebruik maken van normaalwaarschijnlijkheidspapier, bijvoorbeeld om na te gaan of een gegeven frequentieverdeling kan worden opgevat als een normale verdeling.
18.6 gebruik maken van normaalwaarschijnlijkheidspapier om gemiddelde en standaardafwijking van een frequentieverdeling te schatten.
18.7 bij een binomiale verdeling kansen berekenen en de verwachting en de standaardafwijking van een binomiaal verdeelde toevalsvariabele berekenen.
18.8 de standaardafwijking van de som van onafhankelijke toevalsvariabelen berekenen en in samenhang daarmee de $\sqrt{n}$-wet gebruiken.
18.9 beoordelen of een discrete verdeling mag worden benaderd met een normale verdeling; in voorkomende gevallen kan de kandidaat zich baseren op (informele) kennis van de centrale limietstelling.
18.10 een discrete verdeling benaderen met een normale verdeling, al dan niet met een continuïteitscorrectie.

3. Algebra: specifieke en algemene vaardigheden

In dit hoofdstuk worden de algebra-eisen beschreven die aan examenkandidaten vwo wiskunde C worden gesteld.

De eisen die aan de wiskunde C-kandidaten worden gesteld ten aanzien van het gebruiken van algebra zullen voornamelijk gekoppeld zijn aan het oplossen van contextproblemen. In die zin verschillen de eisen die aan een wiskunde C-kandidaat worden gesteld aanzienlijk van de eisen op het gebied van algebra die worden gesteld aan wiskunde B-kandidaten en zijn de eisen ook minder hoog dan bij wiskunde A.

Bij contextproblemen zal de grafische rekenmachine (GR) vaker zinvol kunnen worden ingezet dan bij strikt wiskundige problemen, omdat in realistische probleemsituaties vaak met benaderende getallen (of aantallen) wordt gewerkt. De eis om een vraag met algebraïsch handelen te beantwoorden zal daarom ook expliciet zo worden geformuleerd.

In het volgende wordt het algebraïsch handelen onderscheiden in twee soorten vaardigheden:
- specifieke vaardigheden (kennis en manipulatievaardigheden);
- algemene vaardigheden (strategieën hanteren die tot een oplossing leiden; een stappenplan ontwikkelen; het vertonen van inzicht in de structuur van een expressie).

Bij de opsplitsing in specifieke- en algemene vaardigheden is onderstaande lijst te maken. De opsomming heeft niet de pretentie om volledig dekkend te zijn. Het geheel moet meer gezien worden als een goede indicatie van de eisen die worden gesteld aan de algebraïsche handelingen van kandidaten. Vervolgens worden bij een aantal categorieën korte voorbeelden gegeven waaruit valt af te lezen welke specifieke vaardigheden van een kandidaat worden verwacht.
Ten slotte wordt een aantal voorbeelden gegeven van examenopgaven waarin een beroep wordt gedaan op algemene vaardigheden.

Bij de onderstaande opsomming van specifieke vaardigheden geldt zeker dat een deel (wellicht alleen in zijn grondvorm) bekend verondersteld moet worden vanuit de onderbouw. Denk bijvoorbeeld maar aan de voorrangsregels en het werken met haakjes, eenvoudige breukvormen en wortels. Op de plaats van *A*, *B* en *C* kunnen ook eenvoudige expressies staan, zoals $\mathrm{a}x+\mathrm{b}$ en $\frac{\mathrm{a}}{x}+\mathrm{b}$

In bijlage 2 van deze syllabus worden op het gebied van de algebra de verschillen tussen de drie vakken – wiskunde A, B en C – in algemene zin belicht.

Specifieke vaardigheden	
A. Breukvormen	~~1.~~ $\cancel{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{A+B}{AB}}$ [2] 2. $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD}$ 3. $A\cdot\frac{B}{C}=\frac{A\cdot B}{C}=\frac{A}{C}\cdot B=A\cdot B\cdot\frac{1}{C}$ 4. $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$ 5. $\frac{A}{\frac{B}{C}}=A\cdot\frac{C}{B}=\frac{A\cdot C}{B}$
B. Wortelvormen	1. $\sqrt{A}=B\rightarrow A=B^2\ (B\geq 0)$ [3] 2. $\sqrt{A\cdot B}=\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\ \ (A, B\geq 0)$ 3. $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\ \ (A\geq 0, B>0)$
C. Exponenten en logaritmen	de regels voor machten kennen de regels voor logaritmen kennen
D. 'Herleidingen' uitvoeren aan de hand van de elementen genoemd bij A, B en C	1. via substitutie van getallen 2. via substitutie van expressies 3. via reductie van expressies 4. via het omwerken van formules
E. Vergelijkingen oplossen met behulp van algemene vormen	1. $A\cdot B=0\Rightarrow A=0$ of $B=0$ 2. $\frac{A}{B}=C\Leftrightarrow A=B\cdot C$ met $B\neq 0$
F. Vergelijkingen oplossen via standaardalgoritmen	alleen eerstegraadsvergelijkingen

Algemene vaardigheden	
G. Kwalitatief redeneren	1. Kwalitatief redeneren aan de hand van een gegeven expressie 2. gedrag van een expressie (functie) globaal (uitzoomen) en lokaal (inzoomen) kwalitatief beschrijven 3. het doorzien van de structuur van een formule

[2] Dit is een specifieke vorm van breukvorm 2 en kan derhalve verwijderd worden.
[3] Uit de voorbeelden bleek al dat een kandidaat dit wel moet beheersen. Deze tegenstrijdigheid is hiermee weggenomen.

Bij onderstaande activiteiten wordt onderscheid gemaakt tussen het kunnen omvormen van de gegeven beginsituatie naar de gegeven eindformulering en het zelfstandig vinden van de eindvorm (zoals bij nr. 3: R = ...).

Algebraïsche activiteit (Specifieke vaardigheden)
categorie A: breukvormen
1. $37{,}5 \cdot \frac{\frac{960}{x}}{2} + 180x = \frac{18000}{x} + 180x$
2. $z\mu = \frac{g\mu -}{\sigma} \rightarrow \quad = \dots$
3. $V = \frac{opp \cdot tijd \cdot \Delta Temp}{R} \rightarrow R = \dots\dots$
4. $\frac{2q^2 - 8q + 16}{q} = 2q - 8 + \frac{16}{q}$

categorie B: wortelvormen
1. $\frac{4\frac{1}{2}}{\sqrt{t}} - 3 = 0 \rightarrow t = \dots$
2. $D = 6{,}9\sqrt{T - 12} \rightarrow T = \dots$
categorie C: regels voor machten en logaritmen
1. $1000 \cdot (0{,}1)^{0{,}05x} \rightarrow 1000 \cdot g^x$ met $g = \dots$
2. $g^4 = 1{,}82 \rightarrow g = 1{,}82^{0{,}25}$
3. $G = 10 \cdot \log P + 90 \rightarrow P = \dots.$
4. $P = 100 \cdot \left(1 - 2^{-c \cdot t}\right)$ en $P = 50 \rightarrow t = \frac{1}{c}$
categorie D: omwerken van formules
1. $250 = c \cdot 250\left(1 - \frac{250}{d}\right) + 250$ en $c \neq 0 \rightarrow d = 250$
2. $V = 87 - \frac{20}{M + 0{,}05} \rightarrow M = \dots.$
3. $K = 0{,}1A + 150$ en $A = \frac{1}{3}q^2 \rightarrow K = \frac{q^2}{30} + 150$
4. $3{,}5x - 5 = -4y + 40 \rightarrow y = -\frac{7}{8}x + \frac{45}{4}$

De algemene vaardigheden komen beter tot uiting in de context van een volledig vraagstuk. Daarom volgt nu een zestal voorbeelden van (examen)vraagstukken waarin een beroep wordt gedaan op deze algemene vaardigheden.

Voorbeeldopgaven bij wiskunde C

1. Scholingsgraad

Het percentage analfabeten in een land is een maat voor het aantal mensen dat onderwijs genoten heeft. Een andere veel gebruikte maat is de “scholingsgraad” van een land. De scholingsgraad (SG_1) van een land wordt meestal berekend door het aantal kinderen in een land dat naar school gaat te delen door het totale aantal kinderen in dat land. Voor kinderen in de basisschoolleeftijd wordt de volgende formule gebruikt:

$$SG_1 = \frac{\textit{aantal kinderen van 6 tot 12 jaar dat naar school gaat}}{\textit{totaal aantal kinderen van 6 tot 12 jaar}}$$

Hieronder zie je een lijst van landen in de wereld die een scholingsgraad (SG_1) in het basisonderwijs hebben van minder dan 0,5.

Somalië	0,21	Mauretanië	0,37
Mali	0,24	Tsjaad	0,38
Bhutan	0,25	Sierra Leone	0,45
Burkina Faso	0,27	Burundi	0,45
Niger	0,27	Ethiopië	0,46
Guinea	0,36	Pakistan	0,49

a. Kun je met de beschikbare gegevens in de tabel ook de scholingsgraad voor al deze landen samen berekenen? Zo ja, doe dat dan. Zo nee, wat voor extra gegevens heb je nodig?

Hierboven is SG_1 omschreven als de verhouding tussen het aantal kinderen dat naar school gaat en het totale aantal kinderen in dat land. Een minder vaak gebruikte omschrijving van de scholingsgraad van een land luidt: Scholingsgraad$_2$ (afgekort SG_2) is de verhouding tussen het aantal kinderen dat wel naar school gaat en het aantal kinderen dat niet naar school gaat. Voor kinderen in de basisschoolleeftijd geldt de formule:

$$SG_2 = \frac{\textit{aantal kinderen van 6 tot 12 jaar dat wel naar school gaat}}{\textit{aantal kinderen van 6 tot 12 jaar dat niet naar school gaat}}$$

b. Bereken SG_2 voor Somalië.

c. Maak een formule voor SG_2 uitgedrukt in SG_1.

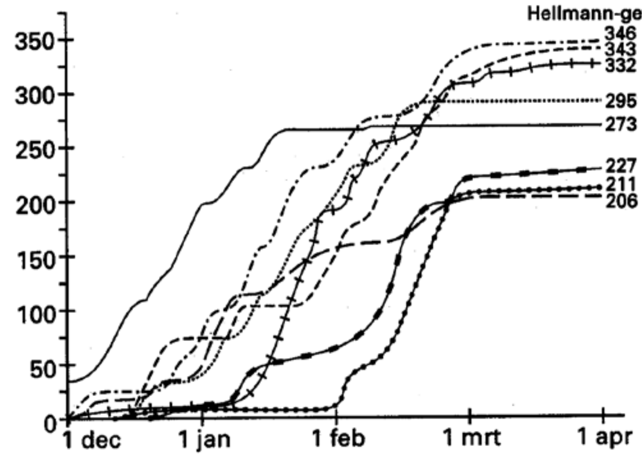
d. Kan er een land bestaan waarvoor geldt: SG_1 is gelijk aan SG_2 ? Geef uitleg.

2. Koude Winters

Om te zien of een winter ‘kouder’ is geweest dan een andere wordt gelet op de waargenomen temperaturen in de periode van 1 november tot en met 31 maart. Voor het berekenen van het zogenaamde *Hellmann-getal* van een winter let men op de gemiddelde dagtemperatuur. Dagen waarvoor dit gemiddelde 0 °C of hoger is, leveren geen bijdrage. Alleen dagen met een gemiddelde onder nul tellen mee. Is het gemiddelde bijvoorbeeld –3,8 °C, dan levert die dag een bijdrage van 3,8 aan het Hellmann-getal. Van zo’n gemiddelde dagtemperatuur wordt dus het minteken weggelaten. De zo verkregen *positieve* bijdragen worden bij elkaar opgeteld. Het eindresultaat is het Hellmann-getal.

In figuur 1 is voor de acht koudste winters uit de periode 1890-1984 in beeld gebracht hoe het Hellmann-getal tot stand is gekomen.

Figuur 1



Tot deze acht koudste winters behoren de winters 1890-1891, 1941-1942 en 1955-1956.

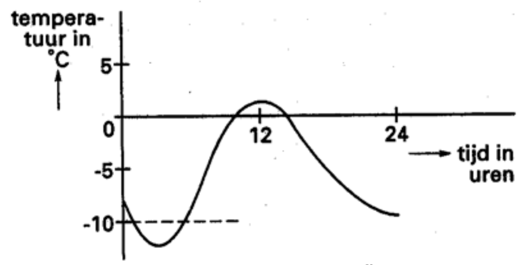
a. Noem de Hellmann-getallen van deze drie winters. Gebruik daarvoor figuur 1 en de volgende teksten
- Een heel bijzondere winter was die van 1890-1891. De strenge kou viel toen vooral in de decembermaand.
- Opvallend laat beginnend en toch één van de drie koudste winters is die van 1941-1942, de barre oorlogswinter
- Verscheidene winters barsten pas in februari goed los. Een voorbeeld daarvan is de winter van 1928-1929 en in nog extremere mate die van 1955-1956. In die laatste winter was er buiten de februarimaand van vorst nauwelijks sprake.

Voor het onderling vergelijken van winters gebruiken weerkundigen ook het zogenaamde *vorstgetal* van een winter. Bij de berekening van dit vorstgetal let men echter niet op de gemiddelde dagtemperatuur. In plaats daarvan gaat men voor elke dag in de periode van 1 november tot en met 31 maart het volgende na:

- was de minimumtemperatuur lager dan 0 °C?
  Zo ja, dan wordt deze dag als *vorstdag* geteld;
- was de temperatuur de gehele dag lager dan 0 °C?
  Zo ja, dan wordt deze dag als *ijsdag* geteld;
- was de minimumtemperatuur – 10 °C of lager?
  Zo ja, dan wordt deze dag als *zeer koude dag* geteld.

Een *vorstdag* kan dus ook nog geteld worden als een *ijsdag* en/of als een *zeer koude dag*.
Wat dit betreft zijn er vier mogelijkheden.
Figuur 2 geeft het temperatuurverloop bij een van deze mogelijkheden, een vorstdag die ook geteld wordt als een zeer koude dag, maar *niet* als een ijsdag.

b. Noem de drie andere mogelijkheden en geef in figuren weer hoe het temperatuurverloop bij elk van deze mogelijkheden zou kunnen zijn.



figuur 2

Na afloop van een winter is het aantal vorstdagen (v), het aantal ijsdagen (y) en het aantal zeer koude dagen (z) bekend. Het vorstgetal (F) wordt dan berekend met de formule:

$$F = 0{,}00275v^2 + 0{,}667y + 1{,}111z$$

Het is mogelijk dat een dag een bijdrage van meer dan 1 levert bij de berekening van F, terwijl die dag geen bijdrage levert aan het Hellmann-getal.

c. Wat is er met zo’n dag aan de hand? Licht je antwoord toe.

Aan de hand van het vorstgetal deelt men de winters in 9 klassen in, van ‘extreem zacht’ tot ‘extreem streng’. Zo geldt bijvoorbeeld dat een winter in de klasse ‘streng’ wordt ingedeeld als $44 < F \leq 68$.
Bij een zekere winter in de klasse ‘streng’ telde men 70 vorstdagen en 37 ijsdagen.

d. Bereken het kleinste en het grootste aantal zeer koude dagen dat deze winter gehad kan hebben.

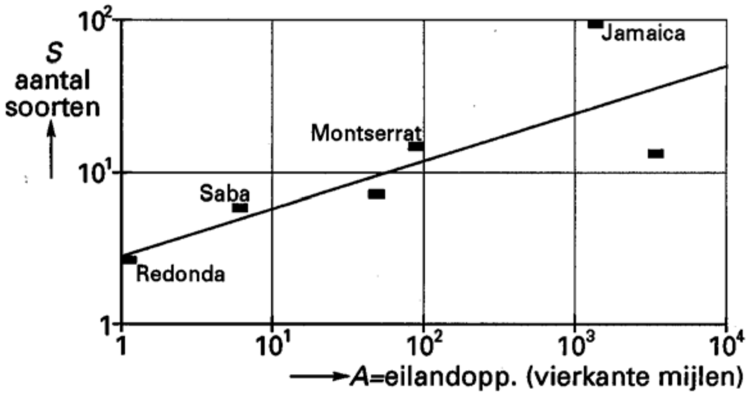
Een zekere winter valt in de klasse ‘streng’.

e. Bereken hoeveel vorstdagen deze winter minimaal gehad moet hebben.

3. Diversiteit

Over het aantal soorten dieren zijn er veel theorieën. Niet alleen over vissen maar ook over bijvoorbeeld het aantal reptielen op eilanden. In een bepaalde theorie wordt gezegd dat (in een klimaatzone) het aantal soorten reptielen alleen afhankelijk is van de oppervlakte van een eiland.
We kijken in deze opgave naar het aantal verschillende soorten reptielen op eilanden in het Caraïbisch gebied.
In figuur 1 zie je de gegevens van de verschillende eilanden getekend. Bovendien is het theoretische verband tussen het aantal soorten S en de oppervlakte A, gegeven door de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$, getekend.

figuur 1



Op het eiland Jamaica zijn er bijna 100 soorten gevonden. Dat is meer dan op grond van de theorie (formule) verwacht mag worden.

a. Hoeveel soorten zou een even groot eiland volgens de theorie hebben? Licht je antwoord toe.

b. Bereken bij welke oppervlakte in km^2 (neem 1 mijl = 1600 meter) je volgens de formule 100 soorten kan verwachten.

Een maat voor de diversiteit (verscheidenheid) van een dierenpopulatie in een gebied is het aantal verschillende soorten per vierkante mijl, de *diversiteit* (D) genaamd.

$$D = \frac{\textit{aantal}\text{ verschillende soorten}}{\textit{oppervlakte}\text{ in vierkante mijlen}}$$

c. Onderzoek of volgens de theorie de diversiteit D groter/kleiner wordt, als de oppervlakte groter wordt.

De diversiteit kan, bijvoorbeeld bij vissen, ook op een geheel andere manier gedefinieerd worden:
Stel dat je twee vissen vangt met teruglegging (na het vangen van de eerste vis wordt deze eerst teruggegooid voordat de tweede vis gevangen wordt).
De kans dat de twee vissen van verschillende soorten zijn, noemt met de diversiteit Div. Het voordeel van deze definitie is dat er een verschil in diversiteit gevonden wordt in het onderstaande voorbeeld, waarin we naar de diversiteit van meren kijken.

	meer 1	meer 2
soort A	90%	50%
soort B	10%	50%

Volgens het tellen van het aantal verschillende soorten (zoals in het begin van deze opgave gebeurde) zouden beide meren dezelfde diversiteit hebben. Toch is voor het gevoel meer 2 veel gemengder omdat in meer 1 voornamelijk soort A zwemt.

d. Bereken voor beide meren de kans dat twee willekeurig gevangen vissen (met teruglegging) van verschillende soorten zijn en laat zien dat de diversiteit *Div* van meer 2 groter is dan van meer 1.

Natuurlijk zal de diversiteit groter zijn als het aantal soorten dat in een meer zwemt groter is. In meer 3 zwemmen vier soorten A, B, C en D rond, die allemaal evenveel voorkomen.

e. Bereken voor meer 3 de diversiteit *Div* (dus bereken de kans dat, als je twee willekeurige vissen vangt, deze van verschillend soort zijn).

De maximale diversiteit krijg je steeds als er van alle soorten evenveel exemplaren rond zwemmen. Deze maximale diversiteit hangt af van het aantal verschillende soorten *N*, dat in een meer voorkomt. Hier volgen twee formules voor $Div_{\max}$

$$Div_{\max} = \frac{N-1}{N} \quad \text{of} \quad Div_{\max} = 1 - \frac{1}{N}$$

f. Leg uit dat beide formules voor iedere *N* dezelfde uitkomst geven (getallenvoorbeelden zijn niet voldoende).

g. Toon door middel van een kansberekening de juistheid van een van deze twee formules aan.

h. Leg uit welke waarden $Div_{\max}$ volgens de formule kan aannemen.

4. Codeur

Een codeur is iemand die beoordeelt of artikelen of mensen bepaalde kenmerken hebben. Hij vult daarbij een vragenlijst in. Is volgens de codeur zo'n kenmerk aanwezig dan vult hij bij de betreffende vraag een '1' in; zo niet, dan wordt een '0' ingevuld.
Stel dat de codeur een lijst met 20 vragen moet invullen. Hij krijgt dan een antwoordenlijstje zoals bijvoorbeeld:
1-1-0-0-1-0-1-1-1-0-0-1-0-0-0-1-1-1-0-0

a. Bereken hoeveel van dit soort lijstjes mogelijk zijn.

b. Bereken hoeveel van de antwoordenlijstjes minstens 8 'enen' en minstens 8 'nullen' bevatten.

Een codeur kan zich er gemakkelijk van afmaken en gewoon een lijstje gokken. Zo'n lijstje is dan volkomen onbetrouwbaar.
Ook als de codeur niet gokt, zal hij fouten maken.
Er zijn verschillende formules waarvan de uitkomsten iets zeggen over de betrouwbaarheid van de lijstjes:

$$C = 1 - \frac{f}{n}$$

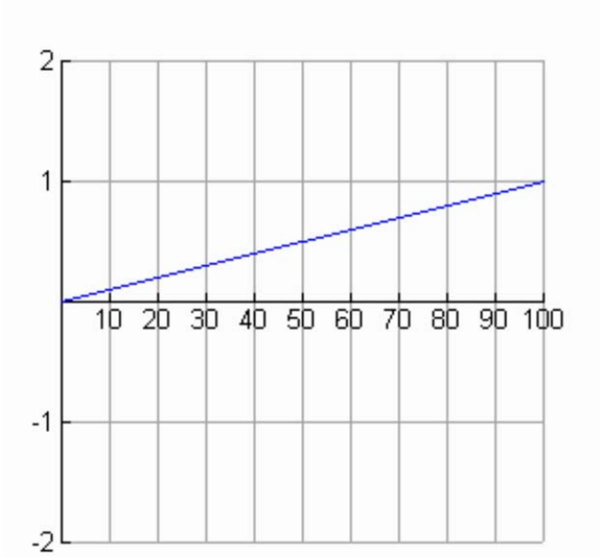
$$P = \frac{g-k}{n-k}$$

waarbij
n = aantal vragen;
f = aantal fout beantwoorde vragen;
g = aantal goed beantwoorde vragen;
k = aantal goed beantwoorde vragen dat je mag verwachten als alle vragen gegokt worden.

c. Toon aan dat *C* te schrijven is als $C = \frac{g}{n}$

In de rest van de opgave nemen we *n* = 100 en dus *k* = 50.
In figuur 1 zie je het verband getekend tussen *C* en *g*.

figuur 1



$\rightarrow$ aantal goede antwoorden (g)

d. Teken in dezelfde figuur 1 ook de grafiek die het verband tussen P en g weergeeft.

Er is ook een verband tussen P en C.

e. Schets dit verband en stel een formule op voor dit verband.

5. FAO luidt noodklok

Onderstaande alinea's stonden in een artikel dat in 1991 in de krant verscheen.

FAO luidt noodklok

Van onze verslaggever

1 AMSTERDAM - Elk jaar verdwijnt steeds meer tropisch oerwoud. In 1990 was de afname wel anderhalf keer zo groot als in 1980. Dit stelt de FAO, de voedsel- en landbouworganisatie van de Verenigde Naties in een zondag verschenen rapport met nieuwe gegevens over de ontbossing van de aarde.

….

2 In 1990 verdween in de tropen zeventien miljoen hectare oerwoud. Dit is een gebied even groot als Oostenrijk, Denemarken en Nederland samen.

3 Er was op 1 januari 1990 nog 2900 miljoen hectare tropisch oerwoud over.

….

4 De FAO wijst naar de geïndustrialiseerde landen, waar de ontbossing een halt is toe geroepen. Tussen 1 januari 1980 en 1 januari 1985 is de bosoppervlakte in die landen met 5 procent toegenomen tot 2100 miljoen hectare.

Een lezer van dit artikel probeert de gegeven informatie in een wiskundig model te verwerken om daarmee te kijken wat de gevolgen zullen zijn als de afname van het tropisch oerwoud op dezelfde wijze blijft voortduren.

Hij noemt $y(t)$ de totale oppervlakte met tropisch oerwoud (in miljoenen hectare) die op tijdstip t nog aanwezig is. Hij neemt $t = 0$ op 1 januari 1980 en neemt t in jaren.

In eerste instantie dacht de lezer dat de formule die bij $y(t)$ hoort van de vorm $y(t) = \mathrm{a} \cdot t + \mathrm{b}$ of van de vorm $y(t) = \mathrm{a} \cdot \mathrm{g}^{t}$ zou zijn.

a. Geef aan hoe grafieken van functies van de vorm $y(t) = \mathrm{a} \cdot t + \mathrm{b}$ en $y(t) = \mathrm{a} \cdot \mathrm{g}^{t}$ er uit kunnen zien en leg uit dat beide vormen niet in overeenstemming zijn met de gegevens uit alinea 1. (Let op: de grafiek van y is dalend)

De lezer kiest voor het model de formule $y(t) = 3311 - 274 \cdot 1{,}0414^{t}$.

b. Maak een toenamendiagram en onderzoek of de uitspraak uit alinea 1 over de afnamen in 1980 en 1990 kloppen bij deze keuze van *y*.

Vragen als ‘in welk jaar is de oppervlakte van het tropisch oerwoud gedaald tot …. ’ kunnen makkelijker beantwoord worden als de formule omgeschreven wordt in een formule waarbij *t* wordt uitgedrukt in *y*.

c. Maak zo’n formule voor *t*.

In alinea 4 wordt vermeld dat de bosoppervlakte in de geïndustrialiseerde landen in de genoemde periode 1980-1985 met 5% is toegenomen. Als we aannemen dat iedere 5 jaar deze oppervlakte met 5% blijft groeien dan zal op zeker moment de bosoppervlakte in de geïndustrialiseerde landen groter zijn dan de oppervlakte van tropisch oerwoud.

d. Bereken in welk jaar dat zou gaan gebeuren.

6. Natuurwaarde

Veel mensen maken zich zorgen om de natuur. Er zijn sterke aanwijzingen dat het aantal verschillende soorten planten afneemt. We bekijken een methode om vast te stellen of de natuur achteruit gaat.
In 1975 heeft men in natuurgebieden 125 stukken land met gelijke oppervlakten afgebakend. In deze *vindplaatsen* werd geïnventariseerd welke plantensoorten er voorkwamen en hoeveel m^2 elke plantensoort bedekte. Op grond van deze gegevens kon voor iedere plantensoort de *natuurwaarde* berekend worden. De *natuurwaarde* geeft informatie over hoe zeldzaam een soort is.

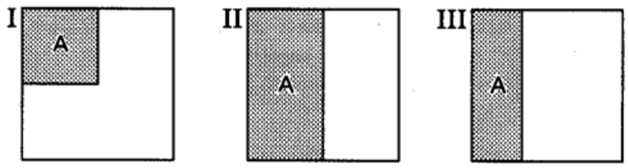
Men hanteerde hierbij de volgende formule:

$$\textit{natuurwaarde}\text{ van soort A} = \frac{\textit{totaal aantal vindplaatsen}}{\textit{aantal vindplaatsen met soort A}} \cdot (1 - \log(\textit{bedekking}))$$

Het *totaal aantal vindplaatsen* is hier dus 125.
De bedekking kun je berekenen door eerst per vindplaats vast te stellen hoe groot het gedeelte is dat soort A bedekt. Vervolgens bereken je het gemiddelde over de 125 vindplaatsen.

Stel dat soort A op drie van de 125 vindplaatsen voorkomt. In figuur 1 is schematisch weergegeven wat de bedekking is van soort A voor deze gebieden.

figuur 1



a. Bereken de natuurwaarde van soort A.

De volgende vragen gaan in op de bovenstaande formule en de achterliggende gedachten over het begrip ‘zeldzaam’.

b. Welke soort is zeldzamer volgens deze formule: soort B die 1 vindplaats in zijn geheel bedekt of soort C die 2 vindplaatsen elk voor de helft bedekt?

De natuurwaarde van een soort kan groot of klein zijn.

c. Welke waarden kan de natuurwaarde volgens deze formule precies aannemen? Geef in je toelichting aan wanneer het over zeldzame soorten gaat en wanneer juist niet.

Stel dat een soort D op iedere vindplaats voorkomt. De bedekking bepaalt nu de natuurwaarde.

d. Onderzoek of een halvering van de bedekking *altijd* dezelfde verandering geeft van de natuurwaarde.

Bijlage 1: Examenprogramma Wiskunde C vwo

Het eindexamen

Het eindexamen bestaat uit het centraal examen en het schoolexamen

Het examenprogramma bestaat uit de volgende domeinen:

Domein A	Vaardigheden
Domein Bg	Functies en grafieken
Domein Cg	Discrete analyse
Domein Eg	Combinatoriek en kansrekening
Domein Ea	Grafen en matrices
Domein Fa	Statistiek en kansrekening
Domein G	Keuzeonderwerpen.

Het centraal examen
Het centraal examen heeft betrekking op de subdomeinen A5, Bg1, Bg2, Cg1, Eg1, Eg2, Eg3, Eg4 en Fa3, in combinatie met de vaardigheden uit subdomeinen A1, A2 en A3.
De CEVO stelt het aantal en de tijdsduur van de zittingen van het centraal examen vast.
De CEVO maakt indien nodig een specificatie bekend van de examenstof van het centraal examen.

Het schoolexamen
Het schoolexamen heeft betrekking op domein A en:
- de (sub)domeinen Cg2, Ea, Fa1 en Fa2;
- het domein G, met dien verstande dat deze onderwerpen per kandidaat kunnen verschillen;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: een of meer domeinen of subdomeinen waarop het centraal examen betrekking heeft;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: andere vakonderdelen, die per kandidaat kunnen verschillen.

De examenstof

Domein A: Vaardigheden

Subdomein A1: Informatievaardigheden
1. De kandidaat kan, mede met behulp van ICT, informatie verwerven, selecteren, verwerken, beoordelen en presenteren.

Subdomein A2: Onderzoeksvaardigheden
2. De kandidaat kan een gegeven probleemsituatie inventariseren, vertalen in een wiskundig model, binnen dat model wiskundige oplostechnieken hanteren en de gevonden oplossingen betekenis geven in de context.

Subdomein A3: Technisch-instrumentele vaardigheden
3. De kandidaat kan bij raadplegen, verkennen en presenteren van wiskundige informatie en bij uitvoeren van wiskundige bewerkingen en redeneringen gebruik maken van toepassingen van ICT.

Subdomein A4: Oriëntatie op studie en beroep
4. De kandidaat kan een verband leggen tussen zijn wiskundige kennis, vaardigheden en belangstelling en de rol van wiskunde in vervolgstudies en de praktijk van verschillende beroepen.

Subdomein A5: Algebraïsche vaardigheden

5. De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige en algebraïsche vaardigheden en formules, heeft daar inzicht in en kan de bewerkingen uitvoeren met, maar ook zonder, gebruik van ICT-middelen zoals de grafische rekenmachine.

Domein Bg: Functies en grafieken

Subdomein Bg1: Standaardfuncties

6. De kandidaat kan grafieken tekenen en herkennen van machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies en van die verschillende typen functies de karakteristieke eigenschappen benoemen.

Subdomein Bg2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden

7. De kandidaat kan functievoorschriften opstellen en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen en vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met behulp van numerieke, grafische en algebraïsche methoden.

Domein Cg: Discrete analyse

Subdomein Cg1: Veranderingen

8. De kandidaat kan het veranderingsgedrag van grafieken en functies relateren aan differentiequotiënten, toenamediagrammen en hellinggrafieken en daarbij een relatie leggen met contexten.

Subdomein Cg2: Rijen en recurrente betrekkingen

9. De kandidaat kan rekenkundige en meetkundige rijen herkennen, beschrijven en er berekeningen mee uitvoeren en werken met recurrente betrekkingen.

Domein Eg: Combinatoriek en kansrekening

Subdomein Eg1: Combinatoriek

10. De kandidaat kan bij telproblemen de situatie visualiseren met een schema, diagram en rooster en combinatorische berekeningen uitvoeren.

Subdomein Eg2: Kansen

11. De kandidaat kan toevalsexperimenten vertalen in een kansmodel, de begrippen onafhankelijke gebeurtenissen en voorwaardelijke kansen hanteren en kansen berekenen op basis van een kansexperiment en op basis van symmetrie en combinatoriek.

Subdomein Eg3: Rekenen met kansen

12. De kandidaat kan bij discrete toevalsvariabelen het begrip onafhankelijkheid hanteren, kansen berekenen met behulp van somregel, complementregel en productregel en van een discrete toevalsvariabele de verwachtingswaarde berekenen.

Subdomein Eg4: Speciale discrete verdelingen

13. De kandidaat kan vaststellen of een toevalsexperiment kan worden vertaald naar een uniforme discrete verdeling of een binomiale kansverdeling en binnen die verdelingen kansen en verwachtingen berekenen.

Domein Ea: Grafen en matrices

Subdomein Ea1: Grafen

14. De kandidaat kan grafen tekenen bij een gegeven tekst, illustratie of matrix en een gegeven graaf interpreteren en omzetten in een geschikt type matrix.

Subdomein Ea2: Matrices

15. De kandidaat kan bij een context een passende matrixrepresentatie kiezen, matrixbewerkingen uitvoeren en gegeven of berekende matrices interpreteren.

Domein Fa: Statistiek en kansrekening

Subdomein Fa1: Populatie en steekproef

16. De kandidaat kan bij een gegeven probleemsituatie de populatie aangeven, een gegeven steekproef beoordelen op geschiktheid en een geschikte steekproef kiezen.

Subdomein Fa2: Ordenen, verwerken en samenvatten van statistische gegevens

17. De kandidaat kan, ook met behulp van ICT, waarnemingen verwerken in een geschikte tabel, visualiseren in een geschikt diagram, samenvatten met geschikte centrum- en spreidingsmaten en gegeven grafische representaties interpreteren.

Subdomein Fa3: Kansverdelingen

18. De kandidaat kan het binomiale en het (standaard-)normale verdelingsmodel gebruiken voor het berekenen van kansen, relatieve frequenties, grenswaarden, gemiddelden en standaardafwijkingen van discrete en continue verdelingen.

Domein G: Keuzeonderwerpen

Bijlage 2: Algebra in het vwo; het onderscheid tussen A, B en C

In deze bijlage worden op het gebied van de algebra de verschillen tussen de drie vakken – wiskunde A, B en C – in algemene zin belicht. De nadere specificaties voor elk van de drie vakken zijn te vinden in hoofdstuk 3 van deze syllabus.

Algebra: specifieke en algemene vaardigheden
Binnen de commissies A, B en C is gesproken over algebra aan de hand van een opsomming in termen van kennis, vaardigheden en inzicht.
In een later stadium is dit gewijzigd in de termen *specifieke vaardigheden* en *algemene vaardigheden*.
In het volgende wordt gepoogd deze twee begrippen te verduidelijken en ook aan te geven op welke manier deze twee soorten vaardigheden een plaats krijgen binnen de drie vakken.
De volgende metafoor kan dienen om de verschillen tussen de A-, B- en C-leerlingen te typeren ten aanzien van het beheersingsniveau van vaardigheden.
In de schaakwereld heb je in de eerste plaats de professionele spelers. Zij worden geacht de tactiek en techniek van het schaakspel volledig te beheersen. Zij trainen op kennis (wat zijn de spelregels?; welke openingen zijn er?), vaardigheden (hoe speel je een bepaald eindspel uit?) en metacognitieve vaardigheden (welke openingen beheers ik goed en welke niet?; waar liggen mijn sterke punten?). Daarnaast ontwikkelen ze strategisch inzicht (wat is een veelbelovende situatie?). Hierbij speelt organisatie van je kennis en vaardigheden een rol.
Naast deze spelers zijn er scheidsrechters (of de sportverslaggevers). Zij kennen de spelregels. Zij hebben, door ervaring, ook enige kennis en vaardigheden m.b.t. het spel. Zij begrijpen het spel, kunnen met de spelers een aantal stappen volgen, de wedstrijden analyseren, kunnen de denkstappen van de spelers waarderen en kunnen een beperkt aantal stappen vooruit denken in een gegeven situatie. Deze scheidsrechters (of verslaggevers) hebben niet de kennis en vaardigheden om, zoals de spelers, zelf een partij op niveau te spelen.
Dan zijn er de geïnteresseerde toeschouwers. Ze moeten de spelregels kennen en begrijpen maar hebben niet de kennis en vaardigheid om zelf op dat niveau te spelen. Dat hoeft ook niet. Wel hebben zij waardering voor het spel en kunnen zij onderscheiden of er een goede prestatie geleverd wordt of niet en zijn ze in staat om een veelbelovende volgende zet te herkennen.

In het vwo zijn er m.b.t. algebra ook drie groepen.
De spelers zijn de wiskunde B groepen die het wiskundespel moeten beheersen, zowel voor wat betreft de kennis en vaardigheden (incl. de metacognitieve) als voor wat betreft de organisatie hiervan.
De kennis en vaardigheden noemen we de ***specifieke algebraïsche vaardigheden***.
De organisatie van kennis en vaardigheden heeft te maken met het inzicht om op de juiste momenten de gewenste specifieke algebraïsche vaardigheden in te zetten. Dit heeft te maken met *strategisch inzicht*: Wat is een veelbelovende volgende zet? Hoe kan ik de dan ontstane situatie beoordelen op zijn bruikbaarheid? Dit noemen we de ***algemene algebraïsche vaardigheden***.

De wiskunde A groep wordt gevormd door de scheidsrechters/sportverslaggevers. Zij beschikken niet over het strategisch inzicht van de spelers, maar kunnen de spelers wel volgen als deze hun strategisch gedrag uitleggen. Ook kunnen zij wel controleren of een zet toegestaan is. In meer eenvoudige situaties kunnen zij enkele tussenstappen bedenken om een bepaald geformuleerd einddoel te behalen.

De wiskunde C groep vormt de toeschouwers. Zij kijken naar echte wedstrijden. Zij hebben waardering voor het spel en kennen en begrijpen de spelregels, maar bezitten niet de techniek en tactiek om ver vooruit te denken. Ze kunnen wel kritisch bezien of een zet veelbelovend is of niet.

Drie voorbeelden die zijn bedoeld om het bovenstaande te illustreren:

Vb 1: Zoek waarden voor *x* en *y* die voldoen aan de volgende eisen:
$x \cdot y = 10$ en $x + 2y = 9$

Een wi B leerling moet hier zijn eigen strategie kunnen bepalen en uitvoeren om tot de oplossing te komen.
Een wi A leerling moet met de hint 'kun je hieruit een vergelijking vinden met maar één onbekende?' tot de oplossing kunnen komen.
Een wi C leerling moet kunnen controleren dat $x = 4$ met $y = 2,5$ en $x = 5$ met $y = 2$ de oplossingen zijn en kan een uitleg volgen om tot die oplossing te komen.

Vb 2: Gegeven is de formule $G = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) + 130$. Hoe verandert de waarde van *G* als *I* twee keer zo groot wordt? Bewijs je uitspraak.
Een wi B leerling moet hiermee uit de voeten kunnen.
Ook een wi A leerling zou dit moeten kunnen, eventueel met tussenvragen: Toon aan dat de formule ook te schrijven is als $G = 10.\log(I) - 10.\log(I_0) + 130$, of Toon aan dat *G* altijd ongeveer 3 groter wordt als *I* verdubbelt.
Een wi C leerling zal op het spoor gezet moeten worden om 2*I* in de formule in te vullen in plaats van *I*. Dit kan door naar getallenvoorbeelden te vragen en daarna expliciet te vragen naar een generalisatie.

Vb 3: Voor de verdubbelingstijd bij exponentiële processen wordt vaak als vuistregel gebruikt: $T = \frac{70}{p}$, waarbij *p* het groeipercentage per jaar is en *T* de verdubbelingstijd in jaren.
Onderzoek voor welke waarden van *p* deze benadering minder dan 1 jaar afwijkt van de werkelijke waarde van de verdubbelingstijd.

Een wi B leerling moet hiermee zelfstandig uit de voeten kunnen.

Voor een wi A leerling zijn er tussenstappen nodig. Bijvoorbeeld: de werkelijke *T* kan berekend worden met de formule $T = \frac{\log 2}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)}$; stel nu een verschilfunctie op tussen de *T* uit de vuistregel en de werkelijke *T*.

Een wi C leerling zou eerst gevraagd kunnen worden een tabel te maken met daarin voor gehele waarden van *p* de werkelijke verdubbelingstijd en die van de vuistregel. Naar aanleiding van deze tabel kunnen dan conclusies getrokken worden.

Bij dit laatste voorbeeld wordt overgeschakeld op een andere representatie van een functie, namelijk de tabel. Dit gebeurt in de onderbouw van het vwo veel en is daar een nadrukkelijk leerdoel. De strategie 'welke representatie van een functie kies ik?' zal zeker bij wiskunde C, maar ook bij wiskunde A een rol moeten spelen. Bij wiskunde B lijkt voornamelijk het herschrijven van analytische representaties van belang.

Het kiezen van een handige representatie is slechts één van de problemen die zich voordoen bij het manipuleren van formules. Andere problemen, waar je weer de *algemene algebraïsche vaardigheden* ten dele in terugziet:

- schakelen tussen verschillende representaties (grafiek, formule, tabel, verbaal)
- schakelen tussen (reken)procedure en object (wat is $\sqrt{2}$, $^2\log 5$, x^2+5x)
- schakelen tussen betekenis geven aan symbolen en betekenisloos manipuleren volgens algebraïsche regels
- schakelen tussen lokaal en globaal, zowel in een formule als in een aantal stappen van een berekening

Samenvattend

Bij de drie vakken wiskunde A, B en C spelen zowel specifieke- als algemene vaardigheden op het gebied van algebra een rol.

De *specifieke vaardigheden* omvatten kenniselementen (zoals regels voor breuken, machten, logaritmen en wortels) en manipulatievaardigheden (zoals het kunnen omwerken van expressies en het oplossen van vergelijkingen).
De mate waarin en het niveau waarop deze specifieke vaardigheden worden beheerst verschillen voor A, B en C.

De *algemene vaardigheden* worden in drie groepen gedeeld:

- kwalitatief redeneren
- substitutie en reductie
- algebraïsche stappen om expressies te bewerken kunnen benoemen en afwegen

Bij wiskunde B komen de drie groepen aan bod.
Voor wiskunde A vervalt de laatste groep, terwijl bij wiskunde C alleen het kwalitatief redeneren wordt genoemd (structuur van een formule doorzien, gedrag van een expressie globaal en lokaal kwalitatief beschrijven)

Algebra en de Grafische Rekenmachine (GR)

Zoals in de verschillende syllabi wordt aangeduid voor het betreffende vak, kan er ook nog op een wat andere manier tegen de algebraïsche vaardigheden worden aangekeken. Een onderscheid tussen wiskunde B enerzijds en wiskunde A en C anderzijds komt ook tot uitdrukking in het type opgaven in een examen.
Bij wiskunde A en C is het wiskundegereedschap bedoeld om contextproblemen mee te analyseren en op te lossen. Omdat in toepassingen veelal met benaderende waarden (van grootheden) wordt gewerkt, ligt het niet voor de hand om exacte antwoorden te eisen. In veel gevallen zal de GR daarbij zinvol kunnen worden ingezet.
Bij wiskunde B daarentegen zullen zeker ook meer abstracte vraagstukken voorkomen die met behulp van algebra moeten worden geanalyseerd of waarvoor een algebraïsch bewijs moet worden geleverd. Daarbij speelt de GR geen rol.

Bijlage 3: Lijst van formules die in het examen wordt opgenomen

De volgende lijst formules wordt afgedrukt op bladzijde 2 van het examen.

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X)$	$\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$
$E(\overline{X})=E(X)$	$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Verwachting:	$E(X)=n\cdot p$
Standaardafwijking:	$\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $P(X<g)=P\left(Z<\frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

Logaritmen

regel	**voorwaarde**
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0, g\neq 1, a>0, b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\frac{a}{b}$	$g>0, g\neq 1, a>0, b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0, g\neq 1, a>0$
${}^g\log a=\frac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0, g\neq 1, a>0$, $p>0, p\neq 1$