College voor Examens

WISKUNDE A
VWO

Syllabus centraal examen 2012

November 2010

Verantwoording:

Inhoud

Voorwoord

De minister heeft de examenprogramma's op hoofdlijnen vastgesteld. In het examenprogramma zijn de exameneenheden aangewezen waarover het centraal examen (CE) zich uitstrekt: het CE-deel van het examenprogramma. Het examenprogramma geldt tot nader orde.

Het College voor Examens (CvE - voorheen CEVO[1]) geeft in een syllabus, die in beginsel jaarlijks verschijnt, een toelichting op het CE-deel van het examenprogramma. Behalve een beschrijving van de exameneisen voor een centraal examen kan de syllabus verdere informatie over het centraal examen bevatten, bijvoorbeeld over een of meer van de volgende onderwerpen: specificaties van examenstof, begrippenlijsten, bekend veronderstelde onderdelen van domeinen of exameneenheden die verplicht zijn op het schoolexamen, bekend veronderstelde voorkennis uit de onderbouw, bijzondere vormen van examinering (zoals computerexamens), voorbeeldopgaven, toelichting op de vraagstelling, toegestane hulpmiddelen.

Ten aanzien van de syllabus is nog het volgende op te merken. De functie ervan is een leraar in staat te stellen zich een goed beeld te vormen van wat in het centraal examen wel en niet gevraagd kan worden. Naar zijn aard is een syllabus dus niet een volledig gesloten en afgebakende beschrijving van alles wat op een examen zou kunnen voorkomen. Het is mogelijk, al zal dat maar in beperkte mate voorkomen, dat op een CE ook iets aan de orde komt dat niet met zo veel woorden in deze syllabus staat, maar dat naar het algemeen gevoelen in het verlengde daarvan ligt.

Een syllabus is zodoende een hulpmiddel voor degenen die anderen of zichzelf op een centraal examen voorbereiden. Een syllabus kan ook behulpzaam zijn voor de producenten van leermiddelen en voor nascholingsinstanties. De syllabus is *niet* van belang voor het schoolexamen. Daarvoor zijn door de SLO handreikingen geproduceerd die niet in deze uitgave zijn opgenomen.

Deze syllabus geldt voor het examenjaar 2012. Syllabi van eerdere jaren zijn niet meer geldig en kunnen van deze versie afwijken. Voor het examenjaar 2013 wordt een nieuwe syllabus vastgesteld. Het CvE publiceert uitsluitend digitale versies van de syllabi. Dit gebeurt via Examenblad.nl (www.examenblad.nl), de officiële website voor de examens in het voortgezet onderwijs.
In de syllabi 2012 zijn de wijzigingen ten opzichte van de vorige syllabus voor het examenjaar 2011 duidelijk zichtbaar. Deze veranderingen zijn geel gemarkeerd. Er zijn diverse vakken waarbij de syllabus 2012 geen inhoudelijke veranderingen heeft ondergaan.

Een syllabus kan zo nodig ook tussentijds worden aangepast, bijvoorbeeld als een in de syllabus beschreven situatie feitelijk veranderd is. De aan een centraal examen voorafgaande Septembermededeling is dan het moment waarop dergelijke veranderingen bekendgemaakt worden. Kijkt u voor alle zekerheid jaarlijks in september op Examenblad.nl.

Het CvE stelt het aantal en de tijdsduur van de toetsen van het centraal examen vast en de wijze waarop het centraal examen wordt afgenomen. Deze vaststelling wordt gepubliceerd in het rooster voor de centrale examens en in de Septembermededeling.

Voor opmerkingen over syllabi houdt het CvE zich steeds aanbevolen. U kunt die zenden aan info@cve.nl of aan CvE, Postbus 315, 3500 AH Utrecht.

De voorzitter van het College voor Examens,
Drs. H.W. Laan

[1] Op 1 oktober 2009 is de CEVO (Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven) opgegaan in het CvE. De CEVO bestaat niet meer, maar besluiten van de CEVO, onder meer over de syllabi, blijven van kracht zolang deze niet herzien zijn door het CvE.

1. Het centraal examen vwo

1.1 Hulpmiddelen
Raadpleeg hiervoor het Examenblad, www.examenblad.nl.
In bijlage 3 van deze syllabus is een lijst opgenomen met formules die op bladzijde 2 van het examen zal worden afgedrukt.

1.2 Significantie
Er wordt van kandidaten bij wiskunde A niet verlangd dat zij kennis hebben van regels voor het aantal significante cijfers. Daarom zal bij vragen op het centraal examen worden aangegeven in welke nauwkeurigheid een antwoord dient te worden gegeven of er zal genoegen worden genomen met antwoorden in uiteenlopende aantallen decimalen.

1.3 Algebraïsche vaardigheden
Hoewel de grafische rekenmachine een krachtig hulpmiddel is, ook bij het oplossen van vergelijkingen, dient de kandidaat ook algebraïsche vaardigheden te beheersen. In hoofdstuk 4 is dit thema nader uitgewerkt.

1.4 Verdeling examinering CE/SE

Het centraal examen heeft betrekking op de subdomeinen A5, Bg1, Bg2, Cg1, Eg1, Eg2, Eg3, Eg4, Ba1, Ba2, Fa1, Fa2, Fa3 en Fa4, in combinatie met de vaardigheden uit subdomeinen A1, A2 en A3.

In de onderstaande tabel is weergegeven hoe de subdomeinen over het CE en SE verdeeld worden:

Domein	**Subdomein**	**in CE**	**moet in SE**	**mag in SE**
A Vaardigheden	A1: Informatievaardigheden	X	X	
	A2: Onderzoeksvaardigheden	X	X	
	A3: Technisch-instrumentele vaardigheden	X	X	
	A4: Oriëntatie op studie en beroep		X	
	A5: Algebraïsche vaardigheden	X	X	
Bg Functies en grafieken	Bg1: Standaardfuncties	X	X	
	Bg2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden	X		X
Cg1 Discrete analyse	Cg1: Veranderingen	X		X
	Cg2: Rijen en recurrente betrekkingen		X	
Eg Combinatoriek en kansrekening	Eg1: Combinatoriek	X		X
	Eg2: Kansen	X		X
	Eg3: Rekenen met kansen	X		X
	Eg4: Speciale discrete verdelingen	X		X
Ba Differentiaalrekening met toepassingen	Ba1: Afgeleide functies	X	X	
	Ba2: Rekenregels	X	X	
Fa Statistiek en kansrekening	Fa1: Populatie en steekproef	X		X
	Fa2: Ordenen, verwerken en samenvatten van statistische gegevens	X		X
	Fa3: Kansverdelingen	X		X
	Fa4: Het toetsen van hypothesen	X		X
G Keuzeonderwerpen			X	

2. Specificatie van de globale eindtermen voor het CE

In dit hoofdstuk worden de globale eindtermen uit het examenprogramma voor 2007 voor het Centraal Examen (CE) gespecificeerd. Een globale formulering van eindtermen van alle subdomeinen (het examenprogramma) staat in bijlage 1.

Domein A: Vaardigheden

Subdomein A1: Informatievaardigheden

1. De kandidaat kan, mede met behulp van ICT, informatie verwerven, selecteren, verwerken, beoordelen en presenteren.

Specificatie

De kandidaat kan:

1.1 artikelen of berichten uit (nieuws)media of vakliteratuur waarin wiskundige presentaties, redeneringen of berekeningen voorkomen, kritisch analyseren.
1.2 informatie verwerven en selecteren uit schriftelijke, mondelinge en audiovisuele bronnen, mede met behulp van ICT. Waar het een schriftelijk eindexamen betreft, beperkt deze eindterm zich tot het selecteren van informatie uit een gegeven context.
1.3 benodigde gegevens halen en interpreteren uit grafieken, tekeningen, simulaties, schema’s, diagrammen en tabellen, mede met behulp van ICT.
1.4 gegevens weergeven in grafieken, tekeningen, schema’s, diagrammen en tabellen, mede met behulp van ICT.
1.5 hoofd- en bijzaken onderscheiden.
1.6 feiten met bronnen verantwoorden.
1.7 informatie analyseren, schematiseren en structureren.
1.8 de betrouwbaarheid beoordelen van informatie en de waarde daarvan vaststellen voor het op te lossen probleem of te maken ontwerp.

Subdomein A2: Onderzoeksvaardigheden

2. De kandidaat kan een gegeven probleemsituatie inventariseren, vertalen in een wiskundig model, binnen dat model wiskundige oplostechnieken hanteren en de gevonden oplossingen betekenis geven in de context.

Specificatie

De kandidaat kan:

2.1 logische relaties tussen gegevens, beweringen en resultaten aanbrengen en beoordelen en relevante gegevens scheiden van minder relevante gegevens.
2.2 gegevens met elkaar en met de probleemstelling in verband brengen, op grond daarvan een passende aanpak kiezen en deze zo mogelijk opsplitsen in deeltaken.
2.3 in een tekst verstrekte gegevens doelmatig weergeven in een geschikte wiskundige representatie (model).
2.4 vaststellen of een gekozen model voldoet en, indien nodig, een bijstelling hiervan suggereren.
2.5 vaststellen of er aanvullende gegevens nodig zijn en zo ja, welke.
2.6 onderzoeken in hoeverre het model bijgesteld moet worden ten gevolge van wijzigingen in de gegevens.
2.7 een bij het model passende wiskundige oplossingsmethode correct uitvoeren.
2.8 resultaten betekenis geven in de context en binnen die context kritisch analyseren.
2.9 de nauwkeurigheid van de gegevens of werkwijzen betrekken bij de beoordeling van het eindresultaat.
2.10 reflecteren op de gemaakte keuzen voor representatie, werkwijze, oplossingsproces en resultaten en deze onder woorden brengen.

Subdomein A3: Technisch-instrumentele vaardigheden

3. De kandidaat kan bij raadplegen, verkennen en presenteren van wiskundige informatie en bij uitvoeren van wiskundige bewerkingen en redeneringen gebruik maken van toepassingen van ICT.

Subdomein A5: Algebraïsche vaardigheden

5. De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige en algebraïsche vaardigheden en formules, heeft daar inzicht in en kan de bewerkingen uitvoeren met, maar ook zonder, gebruik van ICT-middelen zoals de grafische rekenmachine.

Specificatie

De kaders voor dit subdomein worden geschetst in hoofdstuk 3.

Domein Bg: Functies en grafieken

Subdomein Bg1: Standaardfuncties

6. De kandidaat kan grafieken tekenen en herkennen van machtsfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies en goniometrische functies en van die verschillende typen functies de karakteristieke eigenschappen benoemen.

Specificatie

De kandidaat kan:

6.1 grafieken tekenen van machtsfuncties met rationale exponenten en daarbij de begrippen domein, bereik, stijgen, dalen en asymptotisch gedrag hanteren.

6.2 grafieken tekenen van exponentiële functies van het type $f(x) = a^x$ en hun inverse functies $f(x) = {}^a\log x$ (niet het getal e als grondtal) en daarbij de begrippen domein, bereik, stijgen, dalen en asymptotisch gedrag hanteren.

Subdomein Bg2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden

7. De kandidaat kan functievoorschriften opstellen en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen en vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met behulp van numerieke, grafische en algebraïsche methoden.

Specificatie

De kandidaat kan:

7.1 een in de context beschreven samenhang vertalen in een functievoorschrift.

7.2 op grafieken transformaties uitvoeren als verschuiven en rekken en de samenhang met de bijbehorende
verandering van het functievoorschrift beschrijven.

7.3 functies combineren (optellen, aftrekken, schakelen) en de samenhang met de bijbehorende grafieken beschrijven.

7.4 vergelijkingen oplossen met numerieke, grafische of elementair-algebraïsche methoden.

7.5 de rekenregels voor machten en logaritmen (inclusief grondtalverandering) gebruiken.

7.6 gebruik maken van logaritmische schaalverdelingen.

7.7 ongelijkheden oplossen met de grafische methode.

Domein Cg: Discrete analyse

Subdomein Cg1: Veranderingen

8. De kandidaat kan het veranderingsgedrag van grafieken of functies relateren aan differentiequotiënten, toenamediagrammen en hellinggrafieken en daarbij een relatie leggen met contexten.

Specificatie

De kandidaat kan:

8.1 vaststellen op welke intervallen er sprake is van een constant, een stijgend of een dalend verloop van de grafiek van een functie.

8.2 vaststellen of een stijging/daling toenemend of afnemend is.

8.3 vaststellen of er minima en maxima zijn en uit een grafiek aflezen hoe groot die zijn.

8.4 veranderingen beschrijven met behulp van differenties, bijvoorbeeld Δx.

8.5 bij een gegeven functie of grafiek een toenamediagram tekenen en daaruit conclusies trekken.

8.6 veranderingen beschrijven en vergelijken met behulp van differentiequotiënten.
8.7 differentiequotiënten berekenen als een functie gegeven is door een formule of grafiek.
8.8 differentiequotiënten interpreteren als maat voor de gemiddelde verandering op een interval en als helling van een koorde.
8.9 bij afnemende stapgrootte differentiequotiënten interpreteren als benadering van de helling (steilheid) van de grafiek in een bepaald punt.
8.10 van een gegeven grafiek de bijbehorende hellinggrafiek beschrijven en met een computer of GR numeriek benaderen.
8.11 uit een gegeven hellinggrafiek het verloop van de oorspronkelijke grafiek afleiden.
8.12 relaties leggen tussen contexten, bijbehorende formules of functies en veranderingsgedrag.

Domein Eg: Combinatoriek en kansrekening

Subdomein Eg1: Combinatoriek
10. De kandidaat kan bij telproblemen de situatie visualiseren met een schema, diagram en rooster en combinatorische berekeningen uitvoeren.

Specificatie
De kandidaat kan:
10.1 naar aanleiding van een tekst voor een telprobleem een geschikte visualisatie tekenen zoals een boomdiagram, een wegendiagram of een rooster.
10.2 bij telproblemen vaststellen of er sprake is van rangschikken met herhaling of van rangschikken zonder herhaling.
10.3 bij telproblemen vaststellen of gebruik gemaakt mag worden van de vermenigvuldigregel op grond van onafhankelijkheid.
10.4 het aantal kortste routes in een rooster berekenen.
10.5 het aantal permutaties van *k* uit *n* berekenen.
10.6 het aantal combinaties van *k* uit *n* berekenen.

Subdomein Eg2: Kansen
11. De kandidaat kan toevalsexperimenten vertalen in een kansmodel, de begrippen onafhankelijke gebeurtenissen en voorwaardelijke kansen hanteren en kansen berekenen op basis van een kansexperiment en op basis van symmetrie en combinatoriek.

Specificatie
De kandidaat kan:
11.1 bij toevalsexperimenten de begrippen uitkomst, uitkomstenverzameling, gebeurtenis, elementaire gebeurtenis, onmogelijke gebeurtenis, elkaar uitsluitende gebeurtenissen hanteren.
11.2 empirische kansen berekenen op grond van waarnemingen verkregen door het herhaald uitvoeren van een toevalsexperiment of simulatie.
11.3 nagaan of verondersteld mag worden dat de elementen van een uitkomstenverzameling even waarschijnlijk zijn (symmetrische kansruimte).
11.4 een toevalsexperiment vertalen naar het vaasmodel, al dan niet met teruglegging en al dan niet rekening houdend met de trekkingsvolgorde.
11.5 combinatorische aspecten herkennen bij het tellen van het aantal elementen van een uitkomstenverzameling en bij het berekenen van kansen.
11.6 de overgang beschrijven van empirische kansen naar kansen vanuit een intuïtief begrip van de wet van de grote aantallen.
11.7 kansen berekenen op grond van symmetrie-veronderstellingen en systematisch tellen.
11.8 de begrippen onafhankelijke gebeurtenissen en voorwaardelijke kans hanteren voor symmetrische en niet-symmetrische kansruimten.

Subdomein Eg3: Rekenen met kansen
12. De kandidaat kan bij discrete toevalsvariabelen het begrip onafhankelijkheid hanteren, kansen berekenen met behulp van somregel, complementregel en productregel en van een discrete toevalsvariabele de verwachtingswaarde berekenen.

Specificatie
De kandidaat kan:
12.1 kansen berekenen door gebruik te maken van de somregel en de complementregel.
12.2 kansen berekenen door gebruik te maken van de productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen.
12.3 bij een toevalsexperiment discrete toevalsvariabelen gebruiken en interpreteren.
12.4 de waardenverzameling van een discrete toevalsvariabele (in eenvoudige gevallen met de bijbehorende kansverdeling) beschrijven.
12.5 het begrip onafhankelijkheid voor twee of meer discrete toevalsvariabelen beschrijven.
12.6 voor een discrete toevalsvariabele met gegeven kansverdeling de verwachtingswaarde berekenen en interpreteren.
12.7 de regel "verwachting van de som = som van de verwachtingen" hanteren.

Subdomein Eg4: Speciale discrete verdelingen
13. De kandidaat kan vaststellen of een toevalsexperiment kan worden vertaald naar een uniforme discrete verdeling of een binomiale kansverdeling en binnen die verdelingen kansen en verwachtingen berekenen.

Specificatie
De kandidaat kan:
13.1 vaststellen of een kansexperiment vertaald kan worden naar een uniforme discrete verdeling.
13.2 bij een uniforme discrete verdeling kansen berekenen en de verwachting van een uniform verdeelde toevalsvariabele berekenen.
13.3 vaststellen of een kansexperiment vertaald kan worden naar het model van de binomiale verdeling.
13.4 een binomiaal verdeelde toevalsvariabele opvatten als de som van onafhankelijke Bernoulli-toevalsvariabelen.
13.5 de binomiale kansverdeling beschrijven.
13.6 bij een binomiale verdeling kansen berekenen en de verwachtingswaarde van een binomiaal verdeelde toevalsvariabele berekenen.

Domein Ba: Differentiaalrekening met toepassingen

Subdomein Ba1: Afgeleide functies
14. De kandidaat kan, ook in toepassingssituaties, van een functie met behulp van rekenregels voor machts-, som- en kettingfuncties de afgeleide bepalen, aan de hand daarvan het veranderingsgedrag van de functie beschrijven, inclusief de extreme waarden en deze resultaten betekenis geven in de context.

Specificatie
De kandidaat kan:
14.1 het differentiaalquotiënt gebruiken als maat voor lokale verandering van een functie.
14.2 differentiaalquotiënten benaderen in het geval de functie gegeven is door een formule.
14.3 de afgeleide functie gebruiken als karakteristiek voor het veranderingsgedrag van een functie.
14.4 de diverse notaties voor de afgeleide functie
$f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{dK}{dq}$ herkennen en gebruiken.
14.5 de afgeleide functie gebruiken bij het vinden of verifiëren van extreme waarden van een functie.
14.6 de afgeleide functie bepalen van functies van het type $y = cx^r$ (met r rationaal).
14.7 voor het vinden van de afgeleide functie de som-, verschil- en/of kettingregel gebruiken.
14.8 eenvoudige optimaliseerproblemen oplossen.

Subdomein Ba2: Rekenregels
15. De kandidaat kan, ook in toepassingssituaties, van een functie met behulp van de rekenregels voor product- en quotiëntfuncties de afgeleide bepalen, aan de hand daarvan het

veranderingsgedrag van de functie beschrijven, inclusief de extreme waarden en deze resultaten betekenis geven in de context.

Specificatie
De kandidaat kan:
15.1 de afgeleide functie gebruiken als karakteristiek voor het veranderingsgedrag van een functie.
15.2 de afgeleide functie gebruiken bij het vinden of verifiëren van extreme waarden van een functie.
15.3 voor het vinden van de afgeleide functie de product en/of de quotiëntregel gebruiken.
15.4 eenvoudige optimaliseerproblemen oplossen.

Domein Fa: Statistiek en kansrekening

Subdomein Fa1: Populatie en steekproef
16. De kandidaat kan bij een gegeven probleemsituatie de populatie aangeven, een gegeven steekproef beoordelen op geschiktheid en een geschikte steekproef kiezen.

Specificatie
De kandidaat kan:
16.1 bij een gegeven probleemstelling de populatie aangeven.
16.2 een geschikte steekproef kiezen bij het verzamelen van statistisch materiaal.
16.3 beoordelen of een gekozen steekproef aselect is.
16.4 toevalsmechanismen gebruiken voor het nemen van een aselecte steekproef.

Subdomein Fa2: Ordenen, verwerken en samenvatten van statistische gegevens
17. De kandidaat kan, ook met behulp van ICT, waarnemingen verwerken in een geschikte tabel, visualiseren in een geschikt diagram, samenvatten met geschikte centrum- en spreidingsmaten en gegeven grafische representaties interpreteren.

Specificatie
De kandidaat kan:
17.1 ongeordende waarnemingen verwerken in een frequentietabel.
17.2 absolute en relatieve frequenties vaststellen.
17.3 waarnemingen verdelen in klassen.
17.4 statistische gegevens weergeven in een staafdiagram (ook met ongelijke klassebreedte), een cirkeldiagram, een steel- en bladdiagram, een boxplot, een frequentiepolygoon en een cumulatief frequentiepolygoon.
17.5 een zinvolle grafische representatievorm kiezen voor een verzameling statistische gegevens en de keuze
beargumenteren.
17.6 uit een grafische representatie zinvolle gegevens aflezen.
17.7 misleiding in grafische representaties onderkennen.
17.8 statistische gegevens samenvatten met behulp van de centrummaten gemiddelde, modus en mediaan en de spreidingsmaten spreidingsbreedte, standaardafwijking en kwartielafstand.
17.9 de relevantie afwegen van elk van de genoemde centrummaten en spreidingsmaten in relatie met de context.
17.10 bij statistische berekeningen de grafische rekenmachine gebruiken.
17.11 bij statistische berekeningen en bij het maken van grafische representaties gebruik maken van de computer.

Subdomein Fa3: Kansverdelingen
18. De kandidaat kan het binomiale en het (standaard)normale verdelingsmodel gebruiken voor het berekenen van kansen, relatieve frequenties, grenswaarden, gemiddelden en standaardafwijkingen van discrete en continue verdelingen.

Specificatie
De kandidaat kan:
18.1 het model van de normale verdeling beschrijven.

18.2 in voorkomende gevallen de normale verdeling gebruiken als model voor de frequentieverdeling van een continue grootheid.
18.3 het gemiddelde en de standaardafwijking gebruiken als karakteristieken van een normale verdeling, inclusief de twee vuistregels voor het percentage afwijkingen van het gemiddelde in relatie tot de standaardafwijking.
18.4 binnen een normale verdelingsmodel relatieve frequenties, kansen, grenswaarden, gemiddelde of standaardafwijking berekenen.
18.5 gebruik maken van normaalwaarschijnlijkheidspapier, bijvoorbeeld om na te gaan of een gegeven frequentieverdeling kan worden opgevat als een normale verdeling.
18.6 gebruik maken van normaalwaarschijnlijkheidspapier om gemiddelde en standaardafwijking van een frequentieverdeling te schatten.
18.7 bij een binomiale verdeling kansen berekenen en de verwachting en de standaardafwijking van een binomiaal verdeelde toevalsvariabele berekenen.
18.8 de standaardafwijking van de som van onafhankelijke toevalsvariabelen berekenen en in samenhang daarmee de √n-wet gebruiken.
18.9 beoordelen of een discrete verdeling mag worden benaderd met een normale verdeling; in voorkomende gevallen kan de kandidaat zich baseren op (informele) kennis van de centrale limietstelling.
18.10 een discrete verdeling benaderen met een normale verdeling, al dan niet met een continuïteitscorrectie.

Subdomein Fa4: Het toetsen van hypothesen

19. De kandidaat kan nul- en alternatieve hypothesen en bijbehorende een- en tweezijdige toetsen formuleren en uitvoeren bij binomiaal- of normaalverdeelde toevalsvariabelen.

Specificatie

De kandidaat kan:

19.1 binnen een probleemsituatie de begrippen nulhypothese, alternatieve hypothese, eenzijdig toetsen, tweezijdig toetsen en significantieniveau hanteren.
19.2 bij een binomiaal verdeelde toevalsvariabele de hypothese H_0: $p=p_0$ tegen H_1: $p < p_0$ of H_1: $p > p_0$
of H_1: $p \neq p_0$ formuleren en toetsen.
19.3 een tekentoets uitvoeren.
19.4 bij een normaal verdeelde toevalsvariabele met gegeven standaardafwijking de hypothese H_0: $\mu = \mu_0$ tegen H_1: $\mu < \mu_0$ of H_1: $\mu > \mu_0$ of H_1: $\mu \neq \mu_0$ formuleren en toetsen.

3. Algebra: specifieke en algemene vaardigheden

In dit hoofdstuk worden de algebra-eisen beschreven die aan examenkandidaten vwo wiskunde A worden gesteld.

De eisen die aan de wiskunde A-kandidaten worden gesteld ten aanzien van het gebruiken van algebra zullen voornamelijk gekoppeld zijn aan het oplossen van contextproblemen. In die zin verschillen de eisen die aan een wiskunde A-kandidaat worden gesteld aanzienlijk van de eisen op het gebied van algebra die worden gesteld aan wiskunde B-kandidaten.
Het aantal vragen in een examen waarin een kandidaat algebraïsche vaardigheid moet tonen, kan wel groter zijn dan in de huidige praktijk.

Bij contextproblemen zal de GR vaker zinvol ingezet kunnen worden dan bij strikt wiskundige problemen. Realistische probleemsituaties brengen vaak met zich mee dat de gegeven getallen (aantallen) benaderende waarden zijn. Een exact antwoord is in dergelijke gevallen niet reëel. De eis om een vraag met algebraïsch handelen te beantwoorden zal daarom ook expliciet zo worden geformuleerd.

In het volgende wordt het algebraïsch handelen onderscheiden in twee soorten vaardigheden:
- specifieke vaardigheden (kennis en manipulatievaardigheden);
- algemene vaardigheden (strategieën hanteren die tot een oplossing leiden; een stappenplan ontwikkelen; het vertonen van inzicht in de structuur van een expressie).

Bij de opsplitsing in specifieke- en algemene vaardigheden is onderstaande lijst te maken. De lijst heeft niet de pretentie volledig dekkend te zijn, maar moet meer als een goede indicatie worden gezien. Vervolgens worden bij een aantal categorieën korte voorbeelden gegeven waaruit valt af te lezen welke specifieke vaardigheden van een kandidaat worden verwacht. Tenslotte wordt een tiental voorbeelden gepresenteerd van (delen van) examenopgaven waarin een beroep wordt gedaan op onder andere algemene algebravaardigheden.

Aan het ontwikkelen en toetsen van algebraïsch inzicht of algemene algebraïsche vaardigheden wordt ook aandacht besteed in de Handreiking voor het schoolexamen (SLO).

Bij de onderstaande opsomming van specifieke vaardigheden geldt zeker dat een deel (wellicht alleen in zijn grondvorm) bekend verondersteld moet worden vanuit de onderbouw. Denk bijvoorbeeld maar aan de voorrangsregels en het werken met haakjes, eenvoudige breukvormen en wortels.
Op de plaats van *A*, *B* en *C* kunnen eenvoudige expressies staan, zoals $\mathrm{a}x+\mathrm{b}$ en $\frac{\mathrm{a}}{x}+\mathrm{b}$.

In bijlage 2 van deze syllabus worden op het gebied van de algebra de verschillen tussen de drie vakken – wiskunde A, B en C – in algemene zin belicht.

Specifieke vaardigheden	
A. Breukvormen	~~1. $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{A+B}{AB}$~~ [2] ~~2. $\frac{1}{A}+1=\frac{A+1}{A}$~~ [3] 3. $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD}$ 4. $A\cdot\frac{B}{C}=\frac{A\cdot B}{C}=\frac{A}{C}\cdot B=A\cdot B\cdot\frac{1}{C}$ 5. $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$ 6. $\frac{A}{\frac{B}{C}}=A\cdot\frac{C}{B}=\frac{A\cdot C}{B}$
B. Wortelvormen	1. $\sqrt{A}=B\rightarrow A=B^2\ (B\geq 0)$ [4] 2. $\sqrt{A\cdot B}=\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\ (A,B\geq 0)$ 3. $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\ (A\geq 0, B>0)$
C. Exponenten en logaritmen	1. regels voor machten kennen 2. regels voor logaritmen kennen
D. Herleidingen uitvoeren aan de hand van de elementen genoemd bij A, B en C	1. via substitutie van getallen 2. via substitutie van expressies 3. via reductie van expressies 4. via het omwerken van formules
E. Vergelijkingen oplossen met behulp van algemene vormen	1. $A\cdot B=0\Rightarrow A=0$ of $B=0$ 2. $A\cdot B=A\cdot C\Rightarrow A=0$ of $B=C$ 3. $\frac{A}{B}=C\Leftrightarrow A=B\cdot C$ met $B\neq 0$ 4. $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\Leftrightarrow A\cdot D=B\cdot C$ met $B,D\neq 0$ 5. $A^2=B^2\Leftrightarrow A=B$ of $A=-B$
F. Vergelijkingen met polynomen oplossen via standaardalgoritmen	1. alleen eerstegraadsvergelijkingen 2. tweedegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^2+b=0$ of $ax^2+bx=0$ [5]
Algemene vaardigheden	
G. Kwalitatief redeneren	1. Kwalitatief redeneren aan de hand van een gegeven expressie (zoals: getransformeerde standaardfuncties als zodanig herkennen en daarmee vanuit de kenmerkende karakteristieken redeneren ipv. rekenen) 2. gedrag van een expressie (functie) globaal (uitzoomen) en lokaal (inzoomen) kwalitatief beschrijven 3. het doorzien van de structuur van een formule
H. Substitutie en reductie	complexe delen van een expressie vervangen door 'plaatsvervangers' zodat herkenbare expressies ontstaan

[2] Dit is een specifieke vorm van breukvorm 3 en kan derhalve verwijderd worden.
[3] Dit is een specifieke vorm van breukvorm 3 en kan derhalve verwijderd worden.
[4] Uit de voorbeelden bleek al dat een kandidaat dit wel behoorde te beheersen. Deze tegenstrijdigheid is hiermee weggenomen.
[5] Uit verschillende reeds opgenomen specifieke vaardigheden valt af te leiden dat een kandidaat deze twee typen vergelijkingen moet kunnen oplossen. Om die reden was deze regel niet opgenomen. Gezien de vragen die we hierover hebben gehad, nemen we het bij deze alsnog op. Het betreft hier dus geen uitbreiding van het programma. Het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen met drie parameters ongelijk aan nul m.b.v. de abc-formule behoort niet tot het programma wiskunde A vwo.

Een indicatieve opsomming van activiteiten die een kandidaat geacht wordt te kunnen uitvoeren, gekoppeld aan bovenstaande indeling van specifieke vaardigheden.

Algebraïsche activiteit
categorie A: breukvormen
1. $37{,}5 \cdot \frac{\frac{960}{x}}{2} + 180x = \frac{18000}{x} + 180x$
2. $z = \frac{g-\mu}{\sigma} \rightarrow \mu = g - z \cdot \sigma$
3. $\left(6{,}9 + \frac{298{,}5}{\frac{L}{T} \cdot 3600}\right) \cdot L = 6{,}9L + 0{,}083T$
4. $V = \frac{opp \cdot tijd \cdot \Delta Temp}{R} \rightarrow R = ...$
5. $M = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \rightarrow M = \frac{...}{...}$
6. $\frac{2q^2 - 8q + 16}{q} = 2q - 8 + \frac{16}{q}$
7. $\frac{3000}{t} \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right) = \frac{3000t - 3000}{t^2}$
8. $\frac{60v}{k + \frac{v^2}{2a}} = \frac{120av}{2ak + v^2}$
categorie B: wortelvormen
1. $\frac{4\frac{1}{2}}{\sqrt{t}} - 3 = 0 \rightarrow t = ...$
2. $D = 6{,}9\sqrt{T - 12} \rightarrow T = ...$
categorie C: regels voor exponenten en logaritmen
1. $1000 \cdot (0{,}1)^{0{,}05x} = 1000 \cdot g^x$ met $g = ...$
2. $11000 \cdot 0{,}9^t \cdot \left(0{,}7 - 0{,}5 \cdot 0{,}9^{2t}\right) = 7700 \cdot 0{,}9^t - 5500 \cdot 0{,}9^{3t}$
3. $g^4 = 1{,}82 \rightarrow g = 1{,}82^{0{,}25}$
4. $G = 10 \cdot \log I + 90 \rightarrow I = 10^{0{,}1(G-90)}$
5. $\log G = 2 \cdot \log D + 1{,}18 \rightarrow G = 15 \cdot D^2$
6. $0{,}007 \cdot (8G)^{0{,}425} \cdot (2L)^{0{,}725} \rightarrow 4 \cdot 0{,}007 \cdot G^{0{,}425} \cdot L^{0{,}725}$
7. $P = 100 \cdot \left(1 - 2^{-c \cdot t}\right)$ en $P = 50 \rightarrow t = ...$
8. $\left.\begin{array}{l} S = \frac{1000}{R^3} \\ R = \sqrt{100 + x^2} \end{array}\right\} \rightarrow S = 1000 \cdot \left(100 + x^2\right)^{-1{,}5}$

9.	$\left.\begin{array}{r} V = R^3 \\ O = 6R^2 \end{array}\right\}$ Druk O uit in V en druk V uit in O
10.	$\sqrt[3]{1000x} = 10x^{\frac{1}{3}}$
11.	$2000t^{-2} - 40000t^{-3} = 0 \rightarrow t = ...$
12.	$\log y = a + b\log x \rightarrow y = 10^a \cdot x^b$ $\log y = a + b \cdot x \rightarrow y = 10^a \cdot (10^b)^x$
categorie D: Herleidingen	
1.	$\left.\begin{array}{r} B = \frac{L \cdot S}{120}\left(1 - \frac{P}{100}\right) \\ \text{gegeven } S = 1000 \\ \text{en } P = \frac{L}{3} + 4 \end{array}\right\}$ Geef een formule voor B uitgedrukt in L
2.	$250 = c \cdot 250\left(1 - \frac{250}{d}\right) + 250 \rightarrow d = 250$
3.	$\left.\begin{array}{r} L \cdot B = 30 \\ K = \frac{18547}{L} + 56{,}6L + \frac{5279}{B} + 90{,}8B \end{array}\right\}$ Druk K uit in L
4.	$V = 87 - \frac{20}{M + 0{,}05} \rightarrow M = ...$
5.	$K = 0{,}1A + 150$ en $A = \frac{1}{3}q^2 \rightarrow K = \frac{q^2}{30} + 150$
6.	$3{,}5x - 5 = -4y + 40 \rightarrow y = -\frac{7}{8}x + \frac{45}{4}$
7.	$H = \frac{6{,}7 \cdot I^{1{,}35}}{R} \rightarrow I = ...$
8.	$x\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} = (x+2)\sqrt{x+1}$
categorie E: vergelijkingen oplossen met behulp van algemene vormen	
1.	$\left.\begin{array}{r} a - b = 178 \\ a - 0{,}36b = 205 \end{array}\right\} \rightarrow a = ...$ en $b = ...$
2.	$-0{,}03q^2 + 2bq = 0 \rightarrow q = ...$ of $q = ...$
3.	$(4x^2 - 8)^3(2x + 1) = 0 \rightarrow x = ...$ of $x = ...$ of $x = ...$

Voorbeeldopgaven bij wiskunde A vwo

Voorbeeld 1 (Ontleend aan het examen havo wiskunde B 2005 tijdvak 1 vraag 9)

De gegeven formule $d = H \cdot 3^{\frac{-6,28x}{L}}$ kan voor deze situatie worden omgewerkt tot een formule waarbij *H* wordt uitgedrukt in *L*.
\> Druk *H* uit in *L*.

Voorbeeld 2 (examen vwo wiskunde A1,2 2005 tijdvak 1 vrg 7)

$$N_{\max} = \frac{8289,3}{B} \cdot (1,778 - \log B)$$

\> Leg uit hoe je uitsluitend aan de hand van de formule voor $N_{\max}$ – dus zonder gebruik van de GR – kunt beredeneren dat hier sprake is van een dalende functie.

Voorbeeld 3 (examen A1,2 2002, 1e tijdvak Lentevoordeelweken, vraag 14)
Een kansrekening opgave.
De bedoeling is om de uitdrukking $P = k^2 + 3 \cdot (\frac{1}{3} - \frac{1}{3}k)^2$ die de leerlingen eerst zelf moeten destilleren uit de context, te herleiden tot de in de opgave gegeven formule: $P = 1\frac{1}{3}k^2 - \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}$.

Voorbeeld 4 (examen A1,2 2003, 1e tijdvak Cocktails, vraag 6)
Uit de formules $W = 7,5 - 0,0025x - 0,04y - 0,03z$ (die de leerlingen zelf moesten afleiden uit de context) en de gegeven formule $x + y + z = 100$ afleiden dat $W = 4,5 + 0,0275x - 0,01y$.

Voorbeeld 5 (examen A1,2 2003 tijdvak 2 vraag 15)
Vliegtuigen veroorzaken in de buurt van vliegvelden veel geluidsoverlast. In milieuwetten is vastgelegd welke geluidsbelasting (hoeveel geluid) nog toegestaan is. Door deze wetten worden de groeimogelijkheden van het vliegverkeer beperkt.
De geluidsbelasting *B* op een plaats in de buurt van een vliegveld hangt af van het aantal vliegtuigen dat per jaar passeert en van het geluidsniveau van elk vliegtuig. In deze opgave nemen we aan dat er geen onderlinge verschillen tussen vliegtuigen zijn wat het geluidsniveau betreft. Het geluidsniveau per vliegtuig geven we aan met *L*. Door nieuwe technieken is het mogelijk dit geluidsniveau per vliegtuig steeds verder omlaag te brengen.
Het aantal vliegtuigen per jaar noemen we *N*.
Zoals gezegd is in milieuwetten vastgelegd hoe groot de geluidsbelasting in de buurt van vliegvelden maximaal mag zijn: $B_{\max} = 45$.
De waarde van *L* is bepalend voor het maximaal toegestane aantal vliegtuigen, $N_{\max}$.
In 2001 werd een nieuwe milieuwet van kracht. Sindsdien wordt de geluidsbelasting met de formule $B = 10 \cdot \log N + L - 79$ berekend.
Nog steeds geldt dat de maximale geluidsbelasting 45 is.
Het maximaal toegestane aantal vliegtuigen kan nu geschreven worden als:
$N_{\max} = 2,512 \cdot 10^{12} \cdot 0,794^L$

\> Laat zien hoe dit volgt uit de gegeven formule en $B_{\max} = 45$.

Voorbeeld 6 (uit een examen havo wiskunde A1,2)
Door de stijging van de gemiddelde temperatuur op aarde worden gletsjers steeds kleiner. Het ijs verdwijnt van plaatsen die eeuwenlang door de gletsjer waren bedekt. Waar het ijs verdwenen is, ontstaan vaak korstmossen. Met behulp van deze mossen is het mogelijk bij benadering het jaartal te bepalen waarop het ijs daar verdween. De mosgroei treedt min of meer cirkelvormig op, en er is een duidelijk verband tussen de diameter van het korstmos en de leeftijd.

Een formule die dit verband bij benadering beschrijft is:

$$D = 6{,}9 \times \sqrt{T - 12}$$

waarbij T de leeftijd van het korstmos en dus het aantal jaren dat de bodem vrij van ijs is en D de diameter van het korstmos in mm.
Korstmossen kunnen honderden jaren oud worden.
Bovenstaande formule wordt in de praktijk weinig gebruikt. Men werkt meestal andersom: de diameter D wordt gemeten en men wil graag de bijbehorende leeftijd T weten.

a. Schrijf een formule op die hiervoor geschikt is.(Laat zien hoe je het aanpakt)

b. Een bepaalde korstmos heeft een diameter van 45 mm. Ga na hoe oud deze ongeveer is.

Voorbeeld 7

Zwaardere dieren hebben een zwaarder skelet, ook in verhouding.
Zo weegt het skelet van een veldmuis (20 gram) nog geen gram (= 5%), en dat van een 4000 kg zware olifant ca. 1000 kg (= 25%).
Het verband tussen lichaamsgewicht en skeletgewicht van (land)zoogdieren kan benaderd worden met de formule: $S = 0{,}0343 \cdot M^{1{,}083}$
met S het skeletgewicht in gram en M het lichaamsgewicht in gram.

a. Laat zien hoeveel keer zo groot het skeletgewicht wordt wanneer het lichaamsgewicht 10 maal zo groot wordt (volgens deze formule).

Het lichtste zoogdier ter wereld is de *winterspitsmuis*, met een lichaamsgewicht van zo'n 2 gram.

b. Maak een formule waarmee je op grond van het lichaamsgewicht meteen kunt berekenen hoeveel procent het skeletgewicht bedraagt (bij deze dieren). Maak de formule zo eenvoudig mogelijk.

Bovenstaande formule blijkt voor zware landzoogdieren – zoals olifanten - minder goed te voldoen.
Een betere formule voor die groep is: $S = 0{,}058 \cdot M^{1{,}1}$ met S het skeletgewicht in gram en M het lichaamsgewicht in gram.

Het is eigenlijk vreemd om bij dergelijke zware dieren te werken met grammen.

c. Pas de formule zo aan dat zowel het skeletgewicht als het lichaamsgewicht in **kg** uitgedrukt worden. Maak je formule zo eenvoudig mogelijk en controleer deze met een voorbeeld.

d. Maak een formule waarmee je op grond van het skeletgewicht van een zwaar landzoogdier het lichaamsgewicht kunt berekenen.

Voorbeeld 8

Vliegtuigen veroorzaken in de buurt van een vliegveld veel geluidsoverlast. Door de vliegtuigen stiller te maken probeert met het aantal vliegbewegingen (starts en landingen) op te voeren zonder dat de wettelijke grenzen worden overschreden. In dit verband gebruikte men de formule:

$$20 \cdot \log N = 202 - \tfrac{4}{3}L \qquad \text{(grondtal van de logaritme is 10)}$$

(N aantal vliegbewegingen, L gemiddelde geluidsniveau per vliegtuig)

a. Laat zien dat een afname van L van 75 naar 70 meer dan een verdubbeling van N betekent.

b. Laat zien dat bovenstaande formule bij benadering gelijkwaardig is aan:
$N = 10^{10{,}1 - 0{,}067L}$.

Sinds kort geldt een nieuwe formule: $20 \cdot \log N = 248 - 2L$.

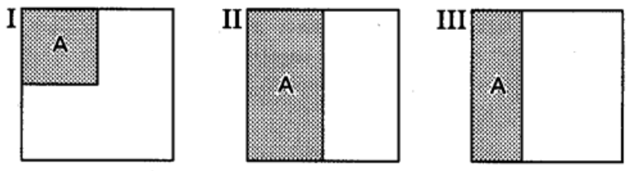
c. Ga na bij welke waarden van L de nieuwe formule meer vliegbewegingen toestaat dan de oude.

Voorbeeld 9 Natuurwaarde
Veel mensen maken zich zorgen om de natuur. Er zijn sterke aanwijzingen dat het aantal verschillende soorten planten afneemt. We bekijken een methode om vast te stellen of de natuur achteruit gaat.
In 1975 heeft men in natuurgebieden 125 stukken land met gelijke oppervlakten afgebakend. In deze *vindplaatsen* werd geïnventariseerd welke plantensoorten er voorkwamen en hoeveel m^2 elke plantensoort bedekte. Op grond van deze gegevens kon voor iedere plantensoort de *natuurwaarde* berekend worden. De *natuurwaarde* geeft informatie over hoe zeldzaam een soort is.
Men hanteerde hierbij de volgende formule:

$$\textit{natuurwaarde}\text{ van soort A} = \frac{\textit{totaal aantal vindplaatsen}}{\textit{aantal vindplaatsen met soort A}} \cdot (1 - \log(\textit{bedekking}))$$

Het *totaal aantal vindplaatsen* is hier dus 125.
De bedekking kun je berekenen door eerst per vindplaats vast te stellen hoe groot het gedeelte is dat soort A bedekt. Vervolgens bereken je het gemiddelde over de 125 vindplaatsen.
Stel dat soort A op drie van de 125 vindplaatsen voorkomt. In figuur 1 is schematisch weergegeven wat de bedekking is van soort A voor deze gebieden.

figuur 1



a. Bereken de natuurwaarde van soort A.

De volgende vragen gaan in op de bovenstaande formule en de achterliggende gedachten over het begrip ‘zeldzaam’.
b. Welke soort is zeldzamer volgens deze formule: soort B die 1 vindplaats in zijn geheel bedekt of soort C die 2 vindplaatsen elk voor de helft bedekt?

De natuurwaarde van een soort kan groot of klein zijn.
c. Welke waarden kan de natuurwaarde volgens deze formule precies aannemen? Geef in je toelichting aan wanneer het over zeldzame soorten gaat en wanneer juist niet.

Stel dat een soort D op iedere vindplaats voorkomt. De bedekking bepaalt nu de natuurwaarde.
d. Onderzoek of een halvering van de bedekking *altijd* dezelfde verandering geeft van de natuurwaarde.

De formule die we bestuderen beschrijft de relatie tussen vier variabelen, namelijk: de natuurwaarde (*naw*), het totaal aantal vindplaatsen (*tav*), het aantal vindplaatsen met soort A (*avs*) en de bedekking (*bed*).
Omdat het totaal aantal vindplaatsen steeds 125 is nemen we vanaf nu *tav* = 125 en hebben we nog 3 variabelen.
In de gegeven formule wordt *naw* uitgedrukt in de variabelen *avs* en *bed*.
e. Maak nu twee nieuwe formules: één waarbij *avs* uitgedrukt wordt in *naw* en *bed* en één waarbij *bed* uitgedrukt wordt in *naw* en *avs*.

Voorbeeld 10 Scholingsgraad

Het percentage analfabeten in een land is een maat voor het aantal mensen dat onderwijs genoten heeft. Een andere veel gebruikte maat is de “scholingsgraad” van een land. De scholingsgraad (SG_1) van een land wordt meestal berekend door het aantal kinderen in een land dat naar de school gaat te delen door het totale aantal kinderen in dat land. Voor kinderen in de basisschoolleeftijd wordt de volgende formule gebruikt:

$$SG_1 = \frac{\textit{aantal kinderen van 6 tot 12 jaar dat naar school gaat}}{\textit{totaal aantal kinderen van 6 tot 12 jaar}}$$

Hieronder zie je een lijst van landen in de wereld die een scholingsgraad (SG_1) in het basisonderwijs hebben van minder dan 0,5.

Somalië	0,21	Mauretanië	0,37
Mali	0,24	Tsjaad	0,38
Bhutan	0,25	Sierra Leone	0,45
Burkina Faso	0,27	Burundi	0,45
Niger	0,27	Ethiopië	0,46
Guinea	0,36	Pakistan	0,49

a. Kun je met de beschikbare gegevens in de tabel ook de scholingsgraad voor al deze landen samen berekenen? Zo ja, doe dat dan. Zo nee, wat voor extra gegevens heb je nodig?

Hierboven is SG_1 omschreven als de verhouding tussen het aantal kinderen dat naar school gaat en het totale aantal kinderen in dat land. Een minder vaak gebruikte omschrijving van de scholingsgraad van een land luidt: Scholingsgraad$_2$ (afgekort SG_2) is de verhouding tussen het aantal kinderen dat wel naar school gaat en het aantal kinderen dat niet naar school gaat. Voor kinderen in de basisschoolleeftijd geldt de formule:

$$SG_2 = \frac{\textit{aantal kinderen van 6 tot 12 jaar dat wel naar school gaat}}{\textit{aantal kinderen van 6 tot 12 jaar dat niet naar school gaat}}$$

b. Bereken SG_2 voor Somalië.

c. Maak een formule voor SG_2 uitgedrukt in SG_1.

d. Kan er een land bestaan waarvoor geldt: SG_1 is gelijk aan SG_2? Geef uitleg.

Bijlage 1: Examenprogramma Wiskunde A vwo

Het eindexamen

Het eindexamen bestaat uit het centraal examen en het schoolexamen.

Het examenprogramma bestaat uit de volgende domeinen:

Domein A	Vaardigheden
Domein Bg	Functies en grafieken
Domein Cg	Discrete analyse
Domein Eg	Combinatoriek en kansrekening
Domein Ba	Differentiaalrekening met toepassingen
Domein Fa	Statistiek en kansrekening
Domein G	Keuzeonderwerpen.

Het centraal examen
Het centraal examen heeft betrekking op de subdomeinen A5, Bg1, Bg2, Cg1, Eg1, Eg2, Eg3, Eg4, Ba1, Ba2, Fa1, Fa2, Fa3 en Fa4, in combinatie met de vaardigheden uit de subdomeinen A1, A2 en A3.
De CEVO stelt het aantal en de tijdsduur van de zittingen van het centraal examen vast.
De CEVO maakt indien nodig een specificatie bekend van de examenstof van het centraal examen.

Het schoolexamen
Het schoolexamen heeft betrekking op domein A en:
- de (sub)domeinen Bg1, Cg2, Ba1 en Ba2;
- het domein G, met dien verstande dat deze onderwerpen per kandidaat kunnen verschillen;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: een of meer domeinen of subdomeinen waarop het centraal examen betrekking heeft;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: andere vakonderdelen, die per kandidaat kunnen verschillen.

De examenstof

Domein A: Vaardigheden

Subdomein A1: Informatievaardigheden
1. De kandidaat kan, mede met behulp van ICT, informatie verwerven, selecteren, verwerken, beoordelen en presenteren.

Subdomein A2: Onderzoeksvaardigheden
2. De kandidaat kan een gegeven probleemsituatie inventariseren, vertalen in een wiskundig model, binnen dat model wiskundige oplostechnieken hanteren en de gevonden oplossingen betekenis geven in de context.

Subdomein A3: Technisch-instrumentele vaardigheden
3. De kandidaat kan bij raadplegen, verkennen en presenteren van wiskundige informatie en bij uitvoeren van wiskundige bewerkingen en redeneringen gebruik maken van toepassingen van ICT.

Subdomein A4: Oriëntatie op studie en beroep

4. De kandidaat kan een verband leggen tussen zijn wiskundige kennis, vaardigheden en belangstelling en de rol van wiskunde in vervolgstudies en de praktijk van verschillende beroepen.

Subdomein A5: Algebraïsche vaardigheden

5. De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige en algebraïsche vaardigheden en formules, heeft daar inzicht in en kan de bewerkingen uitvoeren met, maar ook zonder, gebruik van ICT-middelen zoals de grafische rekenmachine.

Domein Bg: Functies en grafieken

Subdomein Bg1: Standaardfuncties

6. De kandidaat kan grafieken tekenen en herkennen van machtsfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies en goniometrische functies en van die verschillende typen functies de karakteristieke eigenschappen benoemen.

Subdomein Bg2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden

7. De kandidaat kan functievoorschriften opstellen en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen en vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met behulp van numerieke, grafische en algebraïsche methoden.

Domein Cg: Discrete analyse

Subdomein Cg1: Veranderingen

8. De kandidaat kan het veranderingsgedrag van grafieken en functies relateren aan differentiequotiënten, toenamediagrammen en hellinggrafieken en daarbij een relatie leggen met contexten.

Subdomein Cg2: Rijen en recurrente betrekkingen

9. De kandidaat kan rekenkundige en meetkundige rijen herkennen, beschrijven en er berekeningen mee uitvoeren en werken met recurrente betrekkingen.

Domein Eg: Combinatoriek en kansrekening

Subdomein Eg1: Combinatoriek

10. De kandidaat kan bij telproblemen de situatie visualiseren met een schema, diagram en rooster en combinatorische berekeningen uitvoeren.

Subdomein Eg2: Kansen

11. De kandidaat kan toevalsexperimenten vertalen in een kansmodel, de begrippen onafhankelijke gebeurtenissen en voorwaardelijke kansen hanteren en kansen berekenen op basis van een kansexperiment en op basis van symmetrie en combinatoriek.

Subdomein Eg3: Rekenen met kansen

12. De kandidaat kan bij discrete toevalsvariabelen het begrip onafhankelijkheid hanteren, kansen berekenen met behulp van somregel, complementregel en productregel en van een discrete toevalsvariabele de verwachtingswaarde berekenen.

Subdomein Eg4: Speciale discrete verdelingen

13. De kandidaat kan vaststellen of een toevalsexperiment kan worden vertaald naar een uniforme discrete verdeling of een binomiale kansverdeling en binnen die verdelingen kansen en verwachtingen berekenen.

Domein Ba: Differentiaalrekening met toepassingen

Subdomein Ba1: Afgeleide functies

14. De kandidaat kan, ook in toepassingssituaties, van een functie met behulp van rekenregels voor machts-, som- en kettingfuncties de afgeleide bepalen, aan de hand daarvan het veranderingsgedrag van de functie beschrijven, inclusief de extreme waarden en deze resultaten betekenis geven in de context.

Subdomein Ba2: Rekenregels

15. De kandidaat kan, ook in toepassingssituaties, van een functie met behulp van de rekenregels voor product- en quotiëntfuncties de afgeleide bepalen, aan de hand daarvan het veranderingsgedrag van de functie beschrijven, inclusief de extreme waarden en deze resultaten betekenis geven in de context.

Domein Fa: Statistiek en kansrekening

Subdomein Fa1: Populatie en steekproef

16. De kandidaat kan bij een gegeven probleemsituatie de populatie aangeven, een gegeven steekproef beoordelen op geschiktheid en een geschikte steekproef kiezen.

Subdomein Fa2: Ordenen, verwerken en samenvatten van statistische gegevens

17. De kandidaat kan, ook met behulp van ICT, waarnemingen verwerken in een geschikte tabel, visualiseren in een geschikt diagram, samenvatten met geschikte centrum- en spreidingsmaten en gegeven grafische representaties interpreteren.

Subdomein Fa3: Kansverdelingen

18. De kandidaat kan het binomiale en het (standaard-)normale verdelingsmodel gebruiken voor het berekenen van kansen, relatieve frequenties, grenswaarden, gemiddelden en standaardafwijkingen van discrete en continue verdelingen.

Subdomein Fa4: Het toetsen van hypothesen

19. De kandidaat kan nul- en alternatieve hypothesen en bijbehorende een- en tweezijdige toetsen formuleren en uitvoeren bij binomiaal- of normaal-verdeelde toevalsvariabelen.

Domein G: Keuzeonderwerpen

Bijlage 2: Algebra in het vwo; het onderscheid tussen A, B en C

In deze bijlage worden op het gebied van de algebra de verschillen tussen de drie vakken – wiskunde A, B en C – in algemene zin belicht. De nadere specificaties voor elk van de drie vakken zijn te vinden in hoofdstuk 3 van deze syllabus.

Algebra: specifieke en algemene vaardigheden
Binnen de syllabuscommissies A, B en C is gesproken over algebra aan de hand van een opsomming in termen van kennis, vaardigheden en inzicht.
In een later stadium is dit gewijzigd in de termen *specifieke vaardigheden* en *algemene vaardigheden*.
In het volgende wordt gepoogd deze twee begrippen te verduidelijken en ook aan te geven op welke manier deze twee soorten vaardigheden een plaats krijgen binnen de drie vakken.
De volgende metafoor kan dienen om de verschillen tussen de A-, B- en C-leerlingen te typeren ten aanzien van het beheersingsniveau van vaardigheden.
In de schaakwereld heb je in de eerste plaats de professionele spelers. Zij worden geacht de tactiek en techniek van het schaakspel volledig te beheersen. Zij trainen op kennis (wat zijn de spelregels?; welke openingen zijn er?), vaardigheden (hoe speel je een bepaald eindspel uit?) en metacognitieve vaardigheden (welke openingen beheers ik goed en welke niet?; waar liggen mijn sterke punten?).
Daarnaast ontwikkelen ze strategisch inzicht (wat is een veelbelovende situatie?). Hierbij speelt organisatie van je kennis en vaardigheden een rol.
Naast deze spelers zijn er scheidsrechters (of de sportverslaggevers). Zij kennen de spelregels. Zij hebben, door ervaring, ook enige kennis en vaardigheden m.b.t. het spel. Zij begrijpen het spel, kunnen met de spelers een aantal stappen volgen, de wedstrijden analyseren, kunnen de denkstappen van de spelers waarderen en kunnen een beperkt aantal stappen vooruit denken in een gegeven situatie. Deze scheidsrechters (of verslaggevers) hebben niet de kennis en vaardigheden om, zoals de spelers, zelf een partij op niveau te spelen.
Dan zijn er de geïnteresseerde toeschouwers. Ze moeten de spelregels kennen en begrijpen maar hebben niet de kennis en vaardigheid om zelf op dat niveau te spelen. Dat hoeft ook niet. Wel hebben zij waardering voor het spel en kunnen zij onderscheiden of er een goede prestatie geleverd wordt of niet en zijn ze in staat om een veelbelovende volgende zet te herkennen.

In het vwo zijn er m.b.t. algebra ook drie groepen.
De spelers zijn de wiskunde B groepen die het wiskundespel moeten beheersen, zowel voor wat betreft de kennis en vaardigheden (inclusief de metacognitieve) als voor wat betreft de organisatie hiervan. De kennis en vaardigheden noemen we de ***specifieke algebraïsche vaardigheden***.
De organisatie van kennis en vaardigheden heeft te maken met het inzicht om op de juiste momenten de gewenste specifieke algebraïsche vaardigheden in te zetten. Dit heeft te maken met *strategisch inzicht*: Wat is een veelbelovende volgende zet? Hoe kan ik de dan ontstane situatie beoordelen op zijn bruikbaarheid? Dit noemen we de ***algemene algebraïsche vaardigheden***
De wiskunde A groep wordt gevormd door de scheidsrechters/sportverslaggevers. Zij beschikken niet over het strategisch inzicht van de spelers, maar kunnen de spelers wel volgen als deze hun strategisch gedrag uitleggen. Ook kunnen zij wel controleren of een zet toegestaan is. In meer eenvoudige situaties kunnen zij enkele tussenstappen bedenken om een bepaald geformuleerd einddoel te behalen.
De wiskunde C groep vormt de toeschouwers. Zij kijken naar echte wedstrijden. Zij hebben waardering voor het spel en kennen en begrijpen de spelregels, maar bezitten niet de techniek en tactiek om ver vooruit te denken. Ze kunnen wel kritisch bezien of een zet veelbelovend is of niet.

Drie voorbeelden die zijn bedoeld om het bovenstaande te illustreren.

Vb 1: Zoek waarden voor x en y die voldoen aan de volgende eisen:
$x \cdot y = 10$ en $x + 2y = 9$

Een wiB leerling moet hier zijn eigen strategie kunnen bepalen en uitvoeren om tot de oplossing te komen.
Een wiA leerling moet met de hint ‘kun je hieruit een vergelijking vinden met maar één onbekende?' tot de oplossing kunnen komen.

Een wiC leerling moet kunnen controleren dat $x = 4$ met $y = 2,5$ en $x = 5$ met $y = 2$ de oplossingen zijn en kan een uitleg volgen om tot die oplossing te komen.

Vb 2: Gegeven is de formule $G = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) + 130$. Hoe verandert de waarde van G als I twee keer zo groot wordt? Bewijs je uitspraak.

Een wiB leerling moet hiermee uit de voeten kunnen.
Ook een wiA leerling zou dit moeten kunnen, eventueel met tussenvragen: Toon aan dat de formule ook te schrijven is als $G = 10.\log(I) - 10.\log(I_0) + 130$, of Toon aan dat G altijd ongeveer 3 groter wordt.
Een wiC leerling zal op het spoor gezet moeten worden om 2*I* in de formule in te vullen in plaats van *I*. Dit kan door naar getallenvoorbeelden te vragen en daarna expliciet te vragen naar een generalisatie.

Vb 3: Voor de verdubbelingstijd bij exponentiële processen wordt vaak als vuistregel gebruikt: $T = \frac{70}{p}$, waarbij *p* het groeipercentage per jaar is en *T* de verdubbelingstijd in jaren.
Onderzoek voor welke waarden van *p* deze benadering minder dan 1 jaar afwijkt van de werkelijke waarde van de verdubbelingstijd.

Een wiB leerling moet hiermee zelfstandig uit de voeten kunnen.

Voor een wiA leerling zijn er tussenstappen nodig. Bijvoorbeeld: de werkelijke *T* kan berekend worden met de formule $T = \frac{\log 2}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$; stel nu een verschilfunctie op tussen de *T* uit de vuistregel en de werkelijke *T*.

Een wiC leerling zou eerst gevraagd kunnen worden een tabel te maken met daarin voor gehele waarden van *p* de werkelijke verdubbelingstijd en die van de vuistregel. Naar aanleiding van deze tabel kunnen dan conclusies getrokken worden.

Bij dit laatste voorbeeld wordt overgeschakeld op een andere representatie van een functie, namelijk de tabel. Dit gebeurt in de onderbouw van het vwo veel en is een nadrukkelijk leerdoel daar. De strategie 'welke representatie van een functie kies ik?' zal zeker bij wiskunde C, maar ook bij wiskunde A een rol moeten spelen. Bij wiskunde B lijkt voornamelijk het herschrijven van analytische representaties van belang.

Het kiezen van een handige representatie is slechts één van de problemen die zich voordoen bij het manipuleren van formules. Andere problemen, waar je weer de *algemene algebraïsche vaardigheden* ten dele in terugziet:
- schakelen tussen verschillende representaties (grafiek, formule, tabel, verbaal)
- schakelen tussen (reken)procedure en object (wat is $\sqrt{2}$, $^2\log 5$, x^2+5x)
- schakelen tussen betekenis geven aan symbolen en betekenisloos manipuleren volgens algebraïsche regels
- schakelen tussen lokaal en globaal, zowel in een formule als in een aantal stappen van een berekening

Samenvattend
Bij de drie vakken wiskunde A, B en C spelen zowel specifieke- als algemene vaardigheden op het gebied van algebra een rol.

De *specifieke vaardigheden* omvatten kenniselementen (zoals regels voor breuken, machten, logaritmen en wortels) en manipulatievaardigheden (zoals het kunnen omwerken van expressies en het oplossen van vergelijkingen).
De mate waarin en het niveau waarop deze specifieke vaardigheden worden beheerst verschillen voor A, B en C.

De *algemene vaardigheden* worden in drie groepen gedeeld:
- kwalitatief redeneren
- substitutie en reductie
- algebraïsche stappen om expressies te bewerken kunnen benoemen en afwegen

Bij wiskunde B komen de drie groepen aan bod. Voor wiskunde A vervalt de laatste groep, terwijl bij wiskunde C alleen het kwalitatief redeneren wordt genoemd (structuur van een formule doorzien, gedrag van een expressie globaal en lokaal kwalitatief beschrijven)

Algebra en de Grafische Rekenmachine (GR)
Zoals in de verschillende syllabi wordt aangeduid voor het betreffende vak, kan er ook nog op een wat andere manier tegen de algebraïsche vaardigheden worden aangekeken. Een onderscheid tussen wiskunde B enerzijds en wiskunde A en C anderzijds komt ook tot uitdrukking in het type opgaven in een examen.
Bij wiskunde A en C is het wiskundegereedschap bedoeld om contextproblemen mee te analyseren en op te lossen. Omdat in toepassingen veelal met benaderende waarden (van grootheden) wordt gewerkt, ligt het niet voor de hand om exacte antwoorden te eisen. In veel gevallen zal de GR daarbij zinvol kunnen worden ingezet.
Bij wiskunde B daarentegen zullen zeker ook meer abstracte vraagstukken voorkomen die met behulp van algebra moeten worden geanalyseerd of waarvoor een algebraïsch bewijs moet worden geleverd. Daarbij speelt de GR geen rol.

Bijlage 3: Lijst van formules die in het examen wordt opgenomen

De volgende lijst formules wordt afgedrukt op bladzijde 2 van het examen.

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …., n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $\mathrm{P}(X<g)=\mathrm{P}\left(Z<\frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

Differentiëren

naam van de regel	**functie**	**afgeleide**
somregel	$s(x)=f(x)+g(x)$	$s'(x)=f'(x)+g'(x)$
productregel	$p(x)=f(x)\cdot g(x)$	$p'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x)=f(g(x))$	$k'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$ of $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

Logaritmen

regel	**voorwaarde**
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0, g\neq 1, a>0, b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\frac{a}{b}$	$g>0, g\neq 1, a>0, b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0, g\neq 1, a>0$
${}^g\log a=\frac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0, g\neq 1, a>0, p>0, p\neq 1$