Kansrekening

Tellen

$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
$0! = 1$
$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
Binomium van Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$	
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt	
$s(X+Y) = \sqrt{s^2(X) + s^2(Y)}$	
$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X	
$E(S) = n \cdot E(X)$	$s(S) = \sqrt{n} \cdot s(X)$
$E(\overline{X}) = E(X)$	$s(\overline{X}) = \dfrac{s(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer geldt	
$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, met k = 0, 1, 2, …, n	
Verwachting:	$E(X) = np$
Variantie:	$Var(X) = np(1-p)$
Standaardafwijking:	$s(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{np(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde m en standaardafwijking s geldt:
$Z = \dfrac{X-m}{s}$ is standaard normaal verdeeld en
$\mathrm{P}(X < g) = \mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{g-m}{s}\right) = \Phi\left(\dfrac{g-m}{s}\right)$
Hiering is Φ de cumulatieve verdelingsfunctie van de standaardnormale verdeling.

Algebra en verbanden

Vergelijkingen

Vergelijking	Oplossing	Voorwaarde
$ax^2+bx+c=0$	$x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ of $x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$	$a\neq 0$, $D\geq 0$
	Met $D=b^2-4ac$	
$x^n=c$	$x=c^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{c}$	$x>0$, $c>0$, $n>0$
$\mathrm{g}^x=a$	$x={}^g\log a=\frac{\log a}{\log g}$	$a>0$, $g>0$, $g\neq 1$
${}^g\log x=b$	$x=g^b$	$x>0$, $g>0$, $g\neq 1$
$\mathrm{e}^x=a$	$x=\ln a$	$a>0$
$\ln x=b$	$x=\mathrm{e}^b$	$x>0$

Machten en logaritmen

Regel	Voorwaarde
$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$	$a>0$
$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$	$a>0$, $n>0$
$a^p\cdot a^q=a^{p+q}$	$a>0$
$a^p:a^q=a^{p-q}$	$a>0$
$\left(a^p\right)^q=a^{pq}$	$a>0$
$(ab)^p=a^pb^p$	$a>0$, $b>0$
${}^g\log a=\frac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0$, $g\neq 1$, $a>0$, $p>0$, $p\neq 0$
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0$, $g\neq 1$, $a>0$, $b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\frac{a}{b}$	$g>0$, $g\neq 1$, $a>0$, $b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0$, $g\neq 1$, $a>0$

Verbanden

Lineair verband	b is beginwaarde en
$H=b+a\cdot t$	a is helling of richtingscoëfficient
Exponentieel verband	b is beginwaarde en
$H=b\cdot g^t$	g is groeifactor
Harmonische trilling	$H=d$ is ervenwichtstoestand, (c,d) is beginpunt
$H=d+a\cdot\sin b(t-c)$	$\frac{2p}{\lvert b\rvert}$ is de periode en $\lvert a\rvert$ is de amplitude

Somformules voor rijen

Voor de som S van de rekenkundige rij $a, a+v, a+2v, ..., a+(n-1)v$
$S = n \cdot \dfrac{eerste\,term + laatste\,term}{2}$
Voor de som S van de meetkundige rij $a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}$ geldt:
$S = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\dfrac{1-r^n}{1-r} \quad (r \neq 1)$
Voor de som S van de oneindige meetkundige rij $a, ar, ar^2, ar^3, ...$ met $-1 < r < 1$ geldt:
$S = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \dfrac{a}{1-r}$

Differentievergelijkingen

Recursievergelijking	Directe formule
$u(n+1) = a \cdot u(n) + b$ met beginwaarde $u(0)$	$u(n) = \dfrac{b}{1-a} + \left(u(0) - \dfrac{b}{1-a}\right)a^n$ of $u(n) = U + a^n(u_o - U)$ met $U = \dfrac{b}{1-a}$
	Als $-1 < a < 1$, dan is $\lim_{n\to\infty} u(n) = \dfrac{b}{1-a}$
Exponentiële groei	
$u(n+1) = a \cdot u(n)$	$u(n) = u(0) \cdot a^n$
Logistische groei	
$u(n+1) = u(n) + c \cdot u(n) \cdot (G - u(n))$	Met G is grenswaarde

Differentiëren

	Functie	afgeleide
	$g(x) = c \cdot f(x)$	$g'(x) = c \cdot f'(x)$
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
Kettingregel	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

functie	afgeleide
$f(x)=c$	$f'(x)=0$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$f'(x)=\mathrm{e}^x$
$f(x)=g^x$	$f'(x)=g^x\cdot\ln g\,,\ g>0$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$
$f(x)={}^{g}\log x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln g}$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
Lineaire benadering van f in $a: L(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$	

Integreren

Functie	Primitieve
x^n	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+c \quad (n\neq -1)$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
a^x	$\dfrac{1}{\ln a}a^x+c$
e^x	e^x+c
$\ln x$	$x\ln x-x+c$
${}^{a}\log x$	$\dfrac{1}{\ln a}(x\ln x-x)+c$
$\sin x$	$-\cos x+c$
$\cos x$	$\sin x+c$

Lengte van de grafiek van f op het interval $[a,b]$:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Inhoud van een omwentelingslichaam dat ontstaat door de grafiek van de functie f op het interval $[a,b]$ om de x-as te wentelen:

$$I=\boldsymbol{p}\int_a^b\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

Goniometrie

$\sin^2 t+\cos^2 t=1$	$\sin(-t)=-\sin t$	$\sin(\frac{1}{2}\pi-t)=\cos t$
$\tan t=\dfrac{\sin t}{\cos t}$	$\cos(-t)=\cos t$	$\cos(\frac{1}{2}\pi-t)=\sin t$
$\sin 2t=2\sin t\cos t$	$\cos 2t=\cos^2 t-\sin^2 t=2\cos^2 t-1=1-2\sin^2 t$	

$\sin(t+u)=\sin t\cos u+\cos t\sin u$	$\sin t+\sin u=2\sin\dfrac{t+u}{2}\cos\dfrac{t-u}{2}$
$\sin(t-u)=\sin t\cos u-\cos t\sin u$	$\sin t-\sin u=2\sin\dfrac{t-u}{2}\cos\dfrac{t+u}{2}$
$\cos(t+u)=\cos t\cos u-\sin t\sin u$	$\cos t+\cos u=2\cos\dfrac{t+u}{2}\cos\dfrac{t-u}{2}$
$\cos(t-u)=\cos t\cos u+\sin t\sin u$	$\cos t-\cos u=-2\sin\dfrac{t+u}{2}\sin\dfrac{t-u}{2}$

$\cos(\pi-t)=-\cos t$
$\sin a=\sin b$ geeft $a=b+k\cdot 2\pi$ of $a=\pi-b+k\cdot 2\pi$
$\cos a=\cos b$ geeft $a=b+k\cdot 2\pi$ of $a=-b+k\cdot 2\pi$

Parameterkrommen

Als $(x(t),y(t))$ de positie in het Oxy-vlak geeft van een bewegend punt op tijdstip t, dan wordt de snelheidsvector op tijdstip t gegegeven door $(x'(t),y'(t))$.
De snelheid van het punt op tijdstip t wordt gegeven door :
$v(t)=\sqrt{(x'(t))^2+(y('t))^2}$
En de lengte van de afgelegde weg tussen de tijdstippen $t=a$ en $t=b$ door
$\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y('t))^2}\,\mathrm{d}t$
Eenparige cirkelbeweging met middelpunt (m,n), straal r en hoeksnelheid ω:
$\begin{cases} x(t)=m+r\cdot\cos\omega(t-t_0) \\ y(t)=n+r\cdot\sin\omega(t-t_0)\end{cases}$ met $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$, waarbij T =omlooptijd

Differentiaalvergelijkingen

Differentiaalvergelijking	Oplossingen
Exponentiële groei of verval	
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=c\cdot y$	$y(t)=y(0)\cdot\mathrm{e}^{ct}$
Begrensde groei	
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=c\cdot(K-y)$ met $c>0$	$y(t)=K+(y(0)-K)\cdot\mathrm{e}^{-ct}$
Logistische groei	
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=c\cdot y\cdot(G-y)$	$y(t)=\dfrac{G}{1+aG\cdot\mathrm{e}^{-cGt}}$

Standaardlimieten

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a>1)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a>1)$

Meetkunde

Rekenen in cirkels

Lengte		
- omtrek cirkel	$2\pi r$	r is straal
- cirkelboog met middelpuntshoek α (rad)	αr	r is straal
Oppervlakte		
- cirkel	πr^2	r is straal
- cirkelsector met middelpuntshoek α (rad)	αr^2	r is straal

Rekenen in driehoeken

Stelling van Pythagoras : Als driehoek ABC een rechte hoek in C heeft, dan geldt: $a^2+b^2=c^2$
Omgekeerde stelling van Pythagoras : Als in driehoek ABC geldt $a^2+b^2=c^2$ dan is hoek C recht
Cosinusregel : In elke driehoek ABC geldt $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$
Sinusregel : In elke driehoek ABC geldt $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$

Vlakke meetkunde; lijst van stellingen en definities

De *cursief* gedrukte termen mogen als verwijzing in een bewijs gebruikt worden.

Meetkundige plaatsen

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee gegeven punten A en B is de middelloodlijn van het lijnstuk AB *(middelloodlijn).*
De verzameling van alle punten binnen een hoek die dezelfde afstand hebben tot de benen van die hoek is de deellijn (bissectrice) van die hoek *(deellijn).*
De verzameling van alle punten die afstand r tot een gegeven punt M hebben, is de cirkel met middelpunt M en straal r *(cirkel).*
De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee elkaar snijdende lijnen, is het deellijnenpaar (bissectricepaar) van die twee lijnen *(deellijnenpaar).*
De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee evenwijdige lijnen, is de middenparallel van dat lijnenpaar *(middenparallel).*
De verzameling van alle punten die gelijke afstand hebben tot een punt F en een lijn l is een parabool.
P op parabool met brandpunt F en richtlijn l $\Leftrightarrow d(P,F)=d(P,l)$
P op ellips met brandpunten F_1 en $F_2 \Leftrightarrow d(P,F_1)+d(P,F_2)$ = constant

P op hyperbool met brandpunten F_1 en $F_2 \Leftrightarrow \left\| d(P,F_1) - d(P,F_2) \right\|$ = constant

Hoeken, lijnen en afstanden

De overstaande hoeken bij twee snijdende lijnen zijn gelijk *(overstaande hoeken).*
Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn de F-hoeken en Z-hoeken gelijk *(F -hoeken, Z-hoeken).*
Als twee lijnen in twee verschillende punten gesneden worden door een derde lijn, waarbij er een paar gelijke F-hoeken *of* Z-hoeken optreedt. dan zijn die twee lijnen evenwijdig *(F -hoeken, Z-hoeken).*
Een *rechte* hoek is 90°, een *gestrekte* hoek is 180°.
De som van de hoeken van een driehoek is 180° *(hoekensom driehoek).*
De afstand (kortste verbinding) van een punt tot een lijn is de lengte van de loodlijn neergelaten vanuit dat punt op die lijn *(afstand punt tot lijn).*
Als drie punten A, B, C niet op één lijn liggen dan geldt $AB + BC > AC$ (*driehoeksongelijkheid*)

Driehoeken

Gelijkbenige driehoek	
Als in een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende zijden ook gelijk (*gelijkbenige driehoek*)	
Als in een driehoek twee zijden gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende hoeken ook gelijk (*gelijkbenige driehoek*).	
Gelijke driehoeken	
Twee driehoeken zijn gelijk (congruent) als ze gelijk hebben:	
Een zijde en twee aanliggende hoeken.	(*HZH*)
Een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek	(*ZHH*)
Twee zijden en de ingesloten hoek.	(*ZHZ*)
Alle zijden.	(*ZZZ*)
Twee zijden en de rechte hoek tegenover één van die zijden.	(*ZZR*)
Gelijkvormige driehoeken	
Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben:	
Twee paren hoeken.	(*hh*)
Een paar hoeken en de verhouding van de omliggende zijden.	(*zhz*)
De verhouding van de zijden.	(*zzz*)
Een paar rechte hoeken en de verhouding van de twee niet-omliggende zijden.	(*zzr*)

Vierhoeken

De som van de hoeken van een vierhoek is 360°. *(hoekensom vierhoek)*
Equivalente definities en eigenschappen van een *parallellogram.*
Er zijn twee paren evenwijdige zijden.
Er zijn twee paren gelijke overstaande zijden.
Twee overstaande zijden zijn gelijk en evenwijdig.
De diagonalen delen elkaar middendoor.
Equivalente definities en eigenschappen van een *ruit.*
Het is een parallellogram met vier gelijke zijden.
Het is een parallellogram waarin een diagonaal een hoek middendoor deelt.
Het is een parallellogram waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden.
Equivalente definities en eigenschappen van een *rechthoek.*
Het is een vierhoek met vier rechte hoeken.
Het is een parallellogram met een rechte hoek.
Het is een parallellogram met gelijke diagonalen.

Raaklijneigenschappen

De raaklijn in een punt P van een parabool maakt gelijke hoeken met de lijn die P verbindt met het brandpunt en de lijn door P loodrecht op de richtlijn. *(raaklijneigenschap parabool)*
De raaklijn in een punt P van een ellips of hyperbool maakt gelijke hoeken met de lijnen die P verbinden met de twee brandpunten. *(raaklijneigenschap ellips of hyperbool)*

Cirkeleigenschappen

Bij gelijke bogen behoren gelijke koorden. *(boog en koorde)*
De loodlijn vanuit het middelpunt op een koorde deelt die koorde middendoor. *(loodlijn op koorde)*
Stelling van Thales: Als hoek C in driehoek ABC recht is, dan ligt C op de cirkel met middellijn AB .
Omgekeerde stelling van Thales: Als C op de cirkel met middellijn AB ligt, dan is $\angle ACB$ recht.
Stelling van de omtrekshoek: Elke omtrekshoek is half zo groot als de bijbehorende middelpuntshoek.
De hoek tussen een raaklijn en een koorde is gelijk aan de bij die koorde behorende omtrekshoek *(hoek tussen koorde en raaklijn).*
Als punt C over de cirkelboog AB tussen de punten A en B beweegt, dan verandert de grootte van $\angle ACB$ niet. *(Stelling van de constante hoek)*
Als punt D aan dezelfde kant van AB ligt als punt C en $\angle ADB = \angle ACB$, dan liggen C en D op dezelfde cirkelboog AB (*Ongekeerde stelling van de constante hoek)*
Koordenvierhoekstelling: Als $ABCD$ een koordenvierhoek is. dan is de som van elk paar overstaande hoeken 180°
Omgekeerde koordenvierhoekstelling: Als in een vierhoek de som van een paar overstaande hoeken 180° is, dan is het een koordenvierhoek.
Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van middelpunt en raakpunt *(raaklijn).*