

Formulekaart VWO

Kansrekening

Tellen

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! = 1$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\text{Binomium van Newton : } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt: $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

\sqrt{n} -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde \bar{X} van de uitkomsten X :

$$E(S) = n \cdot E(X)$$

$$\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$$

$$E(\bar{X}) = E(X)$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X , waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{met } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Verwachting:

$$E(X) = n \cdot p$$

Variantie:

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Standaardafwijking:

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en

$$P(X < g) = P\left(Z < \frac{g - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{g - \mu}{\sigma}\right)$$

Hierin is Φ de cumulatieve verdelingsfunctie van de standaardnormale verdeling.

Algebra en verbanden

Vergelijkingen

vergelijking	oplossing	voorwaarde
$ax^2 + bx + c = 0$	$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ of $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ met $D = b^2 - 4ac$	$a \neq 0, D \geq 0$
$x^n = c$	$x = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$	$c > 0, n > 0$
$g^x = a$	$x = {}^g \log a = \frac{\log a}{\log g}$	$a > 0, g > 0, g \neq 1$
${}^g \log x = b$	$x = g^b$	$g > 0, g \neq 1$
$e^x = a$	$x = \ln a$	$a > 0$
$\ln x = b$	$x = e^b$	

Machten en logaritmen

regel	voorwaarde
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a > 0$
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$a > 0, n > 0$
$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$a > 0$
$a^p : a^q = a^{p-q}$	$a > 0$
$(a^p)^q = a^{pq}$	$a > 0$
$(ab)^p = a^p \cdot b^p$	$a > 0, b > 0$
${}^g \log a = \frac{p \log a}{p \log g}$	$g > 0, g \neq 0, a > 0, p > 0, p \neq 1$
${}^g \log a + {}^g \log b = {}^g \log ab$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g \log a - {}^g \log b = {}^g \log \frac{a}{b}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g \log a^p = p \cdot {}^g \log a$	$g > 0, g \neq 1, a > 0$

Verbanden

Lineair verband $H = b + a \cdot t$	b is de beginwaarde en a is de helling of richtingscoëfficiënt
Exponentieel verband $H = b \cdot g^t$	b is de beginwaarde en g is de groeifactor
Harmonische trilling $H = d + a \cdot \sin b(t - c)$ of $H = d - a \cdot \sin b(t - c)$	d is de evenwichtsstand, (c, d) is een beginpunt, $\frac{2\pi}{b}$ is de periode, a is de amplitude en $a > 0, b > 0$

Somformules voor rijen

Voor de som S van de rekenkundige rij $a, a + v, a + 2v, \dots, a + (n - 1)v$ geldt:

$$S = n \cdot \frac{\text{eerste term} + \text{laatste term}}{2}$$

Voor de som S van de meetkundige rij $a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}$ geldt:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

Voor de som S van de oneindige meetkundige rij a, ar, ar^2, ar^3, \dots met $-1 < r < 1$ geldt:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a \cdot \frac{1}{1-r}$$

Differentievergelijkingen

recursievergelijking	directe formule
$u(n+1) = a \cdot u(n) + b$ met beginwaarde $u(0)$ exponentiële groei $u(n+1) = a \cdot u(n)$ logistische groei $u(n+1) = u(n) + c \cdot u(n) \cdot (G - u(n))$ waarbij G de grenswaarde is	$u(n) = \frac{b}{1-a} + (u(0) - \frac{b}{1-a}) \cdot a^n$ of $u(n) = U + a^n \cdot (u(0) - U)$ met $U = \frac{b}{1-a}$ Als $-1 < a < 1$, dan geldt: $\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = \frac{b}{1-a}$ $u(n) = u(0) \cdot a^n$

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
constante maal f	$g(x) = c \cdot f(x)$	$g'(x) = c \cdot f'(x)$
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

standaardfunctie	afgeleide
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = g^x$ met $g > 0$	$f'(x) = g^x \cdot \ln g$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = {}^g \log x$ met $g > 0$ en $g \neq 1$	$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln g}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Lineaire benadering van f in a : $L(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$

Integreren

functie	primitieve
$f(x) = x^n$ met $n \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$
$f(x) = a^x$ met $a > 0$	$F(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + c$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$
$f(x) = \ln x$	$F(x) = x \ln x - x + c$
$f(x) = {}^a \log x$ met $a > 0$ en $a \neq 1$	$F(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot (x \ln x - x) + c$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$

Lengte van de grafiek van f op het interval $[a, b]$: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Inhoud van een omwentelingslichaam dat ontstaat door de grafiek van de functie f op het interval $[a, b]$ om de x -as te wentelen: $I = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$

Goniometrie

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$	$\sin(-t) = -\sin t$	$\sin(\frac{1}{2}\pi - t) = \cos t$	$\sin(\pi - t) = \sin t$
$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$	$\cos(-t) = \cos t$	$\cos(\frac{1}{2}\pi - t) = \sin t$	$\cos(\pi - t) = -\cos t$
$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$		$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$	
$\sin(t + u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$		$\sin t + \sin u = 2 \sin \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$	
$\sin(t - u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$		$\sin t - \sin u = 2 \sin \frac{t-u}{2} \cos \frac{t+u}{2}$	
$\cos(t + u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$		$\cos t + \cos u = 2 \cos \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$	
$\cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$		$\cos t - \cos u = -2 \sin \frac{t+u}{2} \sin \frac{t-u}{2}$	
$\sin \alpha = \sin \beta$ geeft $\alpha = \beta + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = \pi - \beta + k \cdot 2\pi$			
$\cos \alpha = \cos \beta$ geeft $\alpha = \beta + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = -\beta + k \cdot 2\pi$			

Parameterkrommen

Als $(x(t), y(t))$ de positie in het Oxy -vlak geeft van een bewegend punt op tijdstip t , dan wordt de snelheidsvector op tijdstip t gegeven door $(x'(t), y'(t))$.

De snelheid van het punt op tijdstip t wordt gegeven door :

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

en de lengte van de afgelegde weg tussen de tijdstippen $t = a$ en $t = b$ door:

$$\int_a^b v(t) dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Eenparige cirkelbeweging met middelpunt (m, n) , straal r en hoeksnelheid ω :

$$\begin{cases} x(t) = m + r \cdot \cos \omega(t - t_0) \\ y(t) = n + r \cdot \sin \omega(t - t_0) \end{cases} \quad \text{met } \omega = \frac{2\pi}{T}, \text{ waarbij } T \text{ de omlooptijd is.}$$

Differentiaalvergelijkingen

differentiaalvergelijking	oplossingen
Exponentiële groei of verval $\frac{dy}{dt} = c \cdot y$	$y(t) = y(0) \cdot e^{ct}$
Begrensde groei $\frac{dy}{dt} = c \cdot (K - y)$ met $c > 0$	$y(t) = K + (y(0) - K) \cdot e^{-ct}$
Logistische groei $\frac{dy}{dt} = c \cdot y \cdot (G - y)$	$y(t) = \frac{G}{1 + a \cdot e^{-cGt}}$ met G de grenswaarde en $a = \frac{G - y(0)}{y(0)}$

Standaardlimieten

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ met $a > 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ met $a > 0$
---	--	---

Meetkunde

Rekenen in cirkels

omtrek cirkel	$2 \pi r$	r is de straal
lengte cirkelboog met middelpuntshoek α (rad)	αr	r is de straal
oppervlakte cirkel	πr^2	r is de straal
oppervlakte cirkelsector met middelpuntshoek α (rad)	$\frac{1}{2} \alpha r^2$	r is de straal

Rekenen in driehoeken

Stelling van Pythagoras: Als driehoek ABC een rechte hoek in C heeft, dan geldt: $a^2 + b^2 = c^2$

Omgekeerde stelling van Pythagoras: Als in driehoek ABC geldt $a^2 + b^2 = c^2$, dan is hoek C recht

Cosinusregel: In elke driehoek ABC geldt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

Sinusregel: In elke driehoek ABC geldt $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

Vlakke meetkunde; lijst van definities en stellingen

De *cursief* gedrukte termen mogen als verwijzing in een bewijs gebruikt worden.

Meetkundige plaatsen

- De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee gegeven punten A en B is de middelloodlijn van het lijnstuk AB (*middelloodlijn*).
- De verzameling van alle punten binnen een hoek die dezelfde afstand hebben tot de benen van die hoek is de deellijn (bissectrice) van die hoek (*deellijn*).
- De verzameling van alle punten die afstand r tot een gegeven punt M hebben, is de cirkel met middelpunt M en straal r (*cirkel*).
- De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee elkaar snijdende lijnen, is het deellijnenpaar (bissectricepaar) van die twee lijnen (*deellijnenpaar*).
- De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee evenwijdige lijnen, is de middenparallel van dat lijnenpaar (*middenparallel*).
- De verzameling van alle punten die gelijke afstand hebben tot een punt F en een lijn l is een parabool (*parabool*).

P op parabool met brandpunt F en richtlijn $l \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, l)$

P op ellips met brandpunten F_1 en $F_2 \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = \text{constant}$

P op hyperbool met brandpunten F_1 en $F_2 \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = \text{constant}$

Hoeken, lijnen en afstanden

De overstaande hoeken bij twee snijdende lijnen zijn gelijk (*overstaande hoeken*).

Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn de F-hoeken en Z-hoeken gelijk (*F-hoeken, Z-hoeken*).

Als twee lijnen in twee verschillende punten gesneden worden door een derde lijn waarbij er een paar gelijke F-hoeken of Z-hoeken optreedt, dan zijn die twee lijnen evenwijdig (*F-hoeken, Z-hoeken*).

Een *rechte hoek* is 90° , een *gestrekte hoek* is 180° .

De som van de hoeken van een driehoek is 180° (*hoekensom driehoek*).

De afstand (kortste verbinding) van een punt tot een lijn is de lengte van de loodlijn neergelaten vanuit dat punt op die lijn (*afstand punt tot lijn*).

Als drie punten A , B en C niet op één lijn liggen dan geldt: $AB + BC > AC$ (*driehoeksongelijkheid*).

Driehoeken

Gelijkbenige driehoek

- Als in een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende zijden ook gelijk (*gelijkbenige driehoek*).
- Als in een driehoek twee zijden gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende hoeken ook gelijk (*gelijkbenige driehoek*).

Gelijke driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijk (congruent) als ze gelijk hebben:

- Een zijde en twee aanliggende hoeken. (*HZH*)
- Een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek. (*ZHH*)
- Twee zijden en de ingesloten hoek. (*ZHZ*)
- Alle zijden. (*ZZZ*)
- Twee zijden en de rechte hoek tegenover één van die zijden. (*ZZR*)

Gelijkvormige driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben:

- Twee paren hoeken. (*hh*)
- Een paar hoeken en de verhouding van de omliggende zijden. (*zhz*)
- De verhouding van de zijden. (*zzz*)
- Een paar rechte hoeken en de verhouding van de twee niet-omliggende zijden. (*zzr*)

Vierhoeken

De som van de hoeken van een vierhoek is 360° (*hoekensom vierhoek*).

Equivalente definities en eigenschappen van een *parallellogram*.

- Het is een vierhoek met twee paren evenwijdige zijden.
- Het is een vierhoek met twee paren gelijke overstaande zijden.
- Het is een vierhoek waarin twee overstaande zijden gelijk zijn en evenwijdig.
- Het is een vierhoek waarin de diagonalen elkaar middendoor delen.

Equivalente definities en eigenschappen van een *ruit*.

- Het is een parallellogram met vier gelijke zijden.
- Het is een parallellogram waarin een diagonaal een hoek middendoor deelt.
- Het is een parallellogram waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden.

Equivalente definities en eigenschappen van een *rechthoek*.

- Het is een vierhoek met vier rechte hoeken.
- Het is een parallellogram met een rechte hoek.
- Het is een parallellogram met gelijke diagonalen.

Raaklijneigenschappen

De raaklijn in een punt P van een parabool maakt gelijke hoeken met de lijn die P verbindt met het brandpunt en de lijn door P loodrecht op de richtlijn (*raaklijneigenschap parabool*).

De raaklijn in een punt P van een ellips of hyperbool maakt gelijke hoeken met de lijnen die P verbinden met de twee brandpunten (*raaklijneigenschap ellips of hyperbool*).

Cirkeleigenschappen

- Bij gelijke bogen behoren gelijke koorden (*boog en koorde*).
- De loodlijn vanuit het middelpunt op een koorde deelt die koorde middendoor (*loodlijn op koorde*).
- *Stelling van Thales*: Als hoek C in driehoek ABC recht is, dan ligt C op de cirkel met middellijn AB .
- *Omgekeerde stelling van Thales*: Als C op de cirkel met middellijn AB ligt, dan is $\angle ACB$ recht.
- *Stelling van de omtrekshoek*: Elke omtrekshoek is half zo groot als de bijbehorende middelpuntshoek.
- De hoek tussen een raaklijn en een koorde is gelijk aan de bij die koorde behorende omtrekshoek (*hoek tussen koorde en raaklijn*).
- Als punt C over de cirkelboog AB tussen de punten A en B beweegt, dan verandert de grootte van $\angle ACB$ niet (*Stelling van de constante hoek*).
- Als punt D aan dezelfde kant van AB ligt als punt C en $\angle ADB = \angle ACB$, dan liggen C en D op dezelfde cirkelboog AB (*Omgekeerde stelling van de constante hoek*).
- *Koordenvierhoekstelling*: Als $ABCD$ een koordenvierhoek is, dan is de som van elk paar overstaande hoeken 180° .
- *Omgekeerde koordenvierhoekstelling*: Als in een vierhoek de som van een paar overstaande hoeken 180° is, dan is het een koordenvierhoek.
- Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindinglijn van middelpunt en raakpunt (*raaklijn*).