

Examen HAVO

2026

tijdvak 2
woensdag 17 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A

Dit examen bestaat uit 21 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 74 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Vuistregels voor de grootte van het verschil van twee groepen

2×2-kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, met $\phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$,

waarin a , b , c en d absolute aantallen zijn

- als $\phi < -0,4$ of $\phi > 0,4$, dan zeggen we “het verschil is groot”
- als $-0,4 \leq \phi < -0,2$ of $0,2 < \phi \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”
- als $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dan zeggen we “het verschil is gering”

Maximaal verschil in cumulatief percentage ($\max V_{cp}$)

(met voor beide groepen een steekproefomvang $n > 100$)

- als $\max V_{cp} > 40$, dan zeggen we “het verschil is groot”
- als $20 < \max V_{cp} \leq 40$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”
- als $\max V_{cp} \leq 20$, dan zeggen we “het verschil is gering”

Effectgrootte $E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$, met $\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$ de steekproefgemiddelden

($\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$), S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0,8$, dan zeggen we “het verschil is groot”
- als $0,4 < E \leq 0,8$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”
- als $E \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is gering”

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen¹⁾ elkaar niet overlappen, dan zeggen we “het verschil is groot”
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”
- in alle andere gevallen zeggen we “het verschil is gering”

noot 1 De ‘box’ is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, met p de steekproefproportie en n de steekproefomvang.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

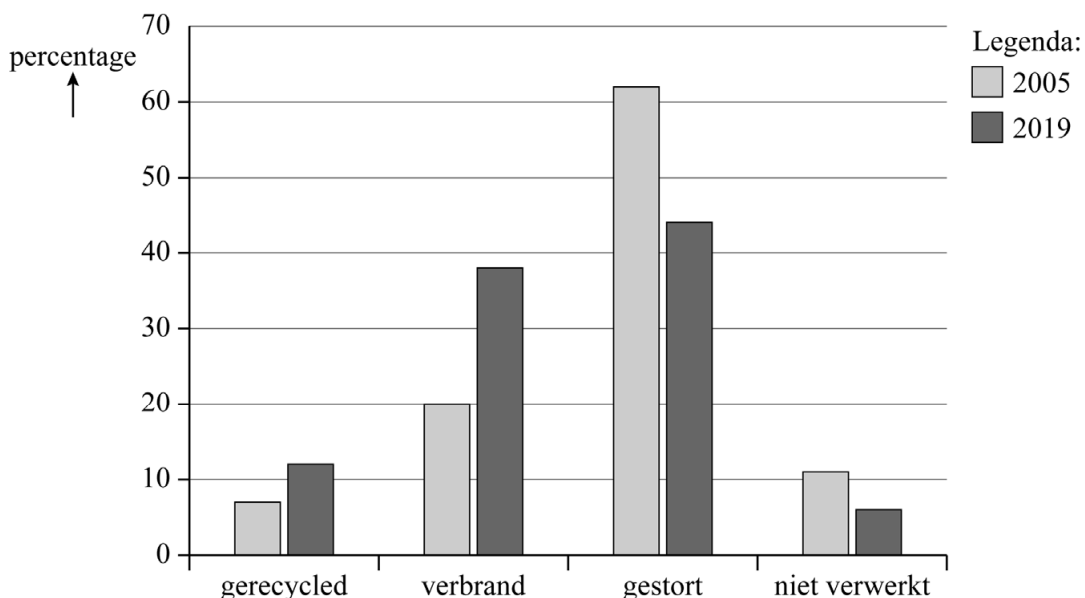
$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, met $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, n de steekproefomvang en S de steekproefstandaardafwijking.

Plasticafval

Jaarlijks produceren wij een grote hoeveelheid plasticafval. Een groot deel hiervan wordt ingezameld en daarna gerecycled, verbrand of op een afvalberg gestort. Het deel dat niet wordt ingezameld, wordt niet verwerkt.

In de figuur zie je voor Europa welk deel van het plasticafval in 2005 en in 2019 werd gerecycled, verbrand, gestort of niet verwerkt.

figuur **plasticafval in Europa**



In 2005 werd er in Europa in totaal 12,26 miljoen ton plasticafval geproduceerd. In 2019 was dit gestegen naar 15,26 miljoen ton.

- 3p **1** Bereken hoeveel miljoen ton plasticafval in 2019 meer werd gerecycled dan in 2005. Geef je antwoord in twee decimalen.

In de figuur is te zien dat in 2005 in Europa 62% van het plasticafval werd gestort. In 2019 was dit percentage gedaald naar 44%. We nemen aan dat het percentage gestort plasticafval in de periode 2005 - 2019 lineair is gedaald.

- 4p **2** Bereken hoeveel procent van het plasticafval in 2011 werd gestort. Geef je antwoord als geheel getal.

Het gewicht aan plasticafval dat jaarlijks wereldwijd wordt geproduceerd neemt exponentieel toe. Elke 15 jaar komt er 132% bij.

- 4p **3** Bereken de procentuele toename per jaar. Geef je antwoord in één decimaal.

De afgelopen decennia nam wereldwijd het percentage verbrand plasticafval P_b toe. Het percentage gestort plasticafval P_s en het percentage niet verwerkt plasticafval P_{nv} namen wereldwijd juist af.

Bij benadering geldt:

$$P_b = 0,42 \cdot t + 13,17 \quad (\text{formule 1})$$

$$P_s = -0,47 \cdot t + 55,73 \quad (\text{formule 2})$$

$$P_{nv} = -0,24 \cdot t + 25,95 \quad (\text{formule 3})$$

Hierin is t het aantal jaren na 2005.

In 2005 was P_b kleiner dan P_s . Volgens formule 1 en 2 komt er echter een moment waarop P_b groter zal zijn dan P_s .

- 3p **4** Bereken hoeveel gehele jaren na 2005 dit voor het eerst zo is.

Voor de toekomst zijn we vooral geïnteresseerd in het percentage wereldwijd gerecycled plasticafval P_r . Omdat de vier percentages P_b , P_s , P_{nv} en P_r samen 100% moeten zijn, kun je met behulp van formule 1, 2 en 3 een formule opstellen voor P_r . Deze formule is van de vorm:

$$P_r = \dots \cdot t + \dots \quad (\text{formule 4})$$

Hierin is t het aantal jaren na 2005.

Op de puntjes in formule 4 moeten getallen staan.

- 4p **5** Bereken de getallen die op de puntjes in formule 4 moeten staan. Geef je antwoorden in twee decimalen.

Een groot deel van de huisartsen in Nederland heeft een eigen praktijk of werkt op vaste basis in de praktijk van een andere huisarts. Het andere (kleinere) deel van de huisartsen vervangt op flexibele basis collega-huisartsen. Deze huisartsen worden **wisselende waarnemers** genoemd.

Het aantal wisselende waarnemers H_W stijgt snel en kan benaderd worden met de volgende formule:

$$H_W = 1983 \cdot 1,0576^t \quad (\text{formule 1})$$

Hierin is t het aantal jaren, met $t = 0$ op 1 januari 2015.

- 3p **6** Bereken hoeveel gehele jaren het volgens formule 1 minimaal duurt voordat het aantal wisselende waarnemers is verdubbeld.

Het totaal aantal huisartsen stijgt ook, maar minder snel. Tussen 1 januari 2006 en 1 januari 2015 is het totaal aantal huisartsen lineair gestegen tot 11 622. Dit was een toename van 20%. Uit deze gegevens is af te leiden dat in deze periode het totaal aantal huisartsen jaarlijks toenam met 215 huisartsen (afgerond op gehelen). De berekening van deze jaarlijkse toename op basis van de gegevens geeft een resultaat met meer cijfers achter de komma.

- 3p **7** Voer deze berekening uit en geef je antwoord in één decimaal.

We nemen aan dat de toename van het totaal aantal huisartsen zich na 2015 op dezelfde wijze voortzet. Voor het totaal aantal huisartsen H_{Totaal} geldt dan bij benadering:

$$H_{\text{Totaal}} = 215 \cdot t + 11\,622 \quad (\text{formule 2})$$

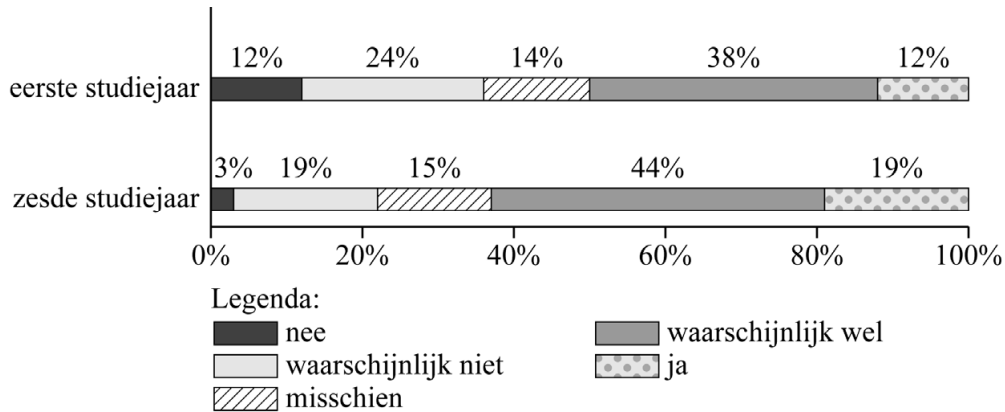
Hierin is t het aantal jaren, met $t = 0$ op 1 januari 2015.

- 4p **8** Bereken met behulp van formule 1 en 2 in welk jaar op 1 januari het aantal wisselende waarnemers voor het eerst meer is dan de helft van het totaal aantal huisartsen.

Ondanks het stijgende aantal huisartsen is er een tekort. Daarom is het belangrijk dat voldoende geneeskundestudenten voor het beroep van huisarts kiezen.

Aan geneeskundestudenten is gevraagd of ze huisarts willen worden. In de figuur zie je de resultaten bij deze vraag.

figuur resultaten bij de vraag ‘Zou je huisarts willen worden?’



In de figuur is te zien dat er een verschil is in de mate waarin geneeskundestudenten uit het eerste studiejaar en uit het zesde studiejaar een voorkeur hebben om huisarts te worden.

- 4p **9** Onderzoek met behulp van het formuleblad of dit verschil groot, middelmatig of gering is.

De vraag ‘Zou je huisarts willen worden?’ is slechts aan een deel van de geneeskundestudenten in het zesde studiejaar gesteld. Het gaat dus om een steekproef. Van de geneeskundestudenten uit het zesde studiejaar die deelnamen aan de steekproef gaf 19% het antwoord ‘ja’. Op basis van de steekproefomvang is berekend dat het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage geneeskundestudenten uit het zesde studiejaar dat ‘ja’ heeft geantwoord [13,91;24,09] is.

- 4p **10** Bereken met behulp van het formuleblad de steekproefomvang onder de geneeskundestudenten in het zesde studiejaar.

Spanwijdte en lichaamslengte

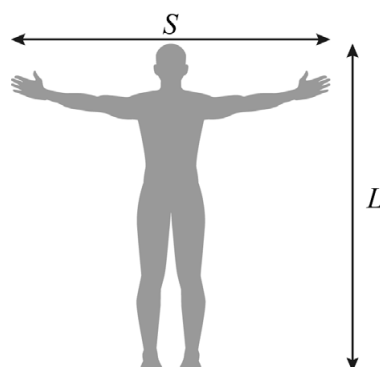
Bij de meeste mensen is de spanwijdte van de armen S net iets groter dan de lichaamslengte L . Zie figuur 1.

Met de volgende formule kun je de verhouding V tussen S en L berekenen:

$$V = \frac{S}{L} \quad \text{met } S \text{ en } L \text{ in meter}$$

Het vermoeden bestaat dat de grootte van de verhouding V van invloed is op de prestatie van sporters binnen de vechtsport.

figuur 1



In 2019 vochten de twee Nederlandse vechters Rico Verhoeven en Badr Hari tegen elkaar. Rico was 1,96 m lang met $V = 1,071$ en Badr was 1,98 m lang met $V = 1,079$.

- 3p 11 Bereken het verschil in spanwijdte tussen deze twee vechters. Geef je antwoord in hele centimeters.

Onder andere bij de vechtsport MMA (mixed martial arts) is onderzocht of de verhouding V van invloed is op de prestatie van de vechters. In het onderzoek kwamen een laagste en een hoogste waarde van V voor:

- vechter A had de laagste waarde van V
- vechter B had de hoogste waarde van V

Stel dat vechter A en vechter B dezelfde spanwijdte hebben.

- 2p 12 Leg uit welke van de twee vechters dan de grootste lichaamslengte heeft.

In het onderzoek kwam ook een vechter voor met een spanwijdte die 2,5 cm langer was dan zijn lichaamslengte. Voor deze vechter geldt dus $S = L + 0,025$. De verhouding V die bij de vechter hoort is $V = 1,01445$.

- 3p 13 Bereken de lichaamslengte van deze vechter in meter. Geef je antwoord in twee decimalen.

De UFC, de grootste MMA-organisatie ter wereld, verdeelt de vechters in acht verschillende gewichtsklassen. In 2018 is per gewichtsklasse onderzoek gedaan naar de verhouding V van de vechters. In de tabel zijn de resultaten te zien van een steekproef onder de vechters uit de vier lichtste gewichtsklassen.

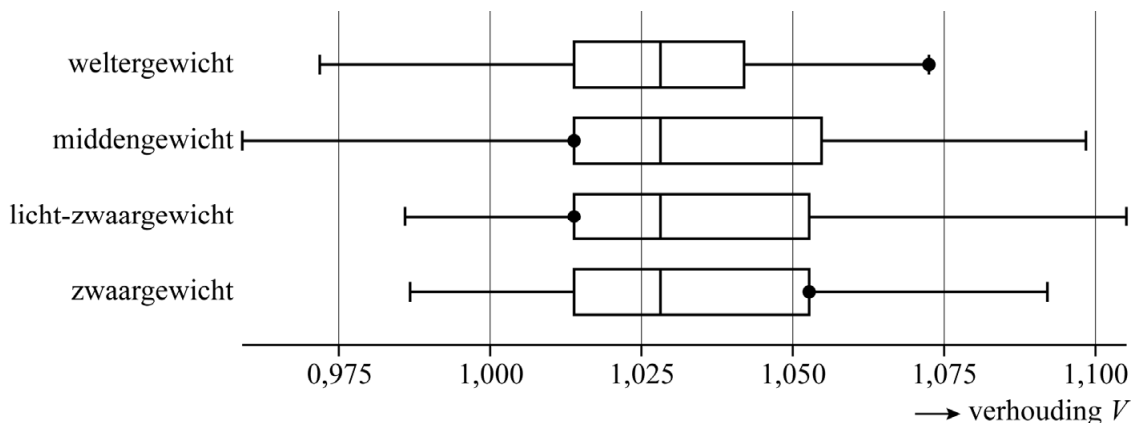
tabel

	verhouding V			
gewichtsklasse	minimum	gemiddelde	maximum	standaardafwijking
vlieggewicht	0,984	1,010	1,067	0,021
bantamgewicht	0,956	1,023	1,077	0,028
vedergewicht	0,942	1,022	1,075	0,027
lichtgewicht	0,985	1,029	1,058	0,028

- 3p **14** Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil in de verhouding V tussen de gewichtsklassen 'vlieggewicht' en 'lichtgewicht' groot, middelmatig of gering is.

In figuur 2 is voor de vier zwaarste gewichtsklassen de verdeling van de verhouding V met boxplots weergegeven. Met een zwarte stip is voor elke gewichtsklasse de waarde van de verhouding V voor de kampioen aangegeven.

figuur 2



Op basis van figuur 2 worden drie uitspraken gedaan:

- I De kampioen in elk van de vier gewichtsklassen behoort tot de 25% vechters met de hoogste waarde van V in die gewichtsklasse.
- II De meerderheid van de vechters in elk van de vier gewichtsklassen heeft een verhouding V met een waarde groter dan 1,025.
- III Op basis van de vuistregels op het formuleblad is het verschil tussen elk tweetal gewichtsklassen gering, als we kijken naar de verdeling van de verhouding V .

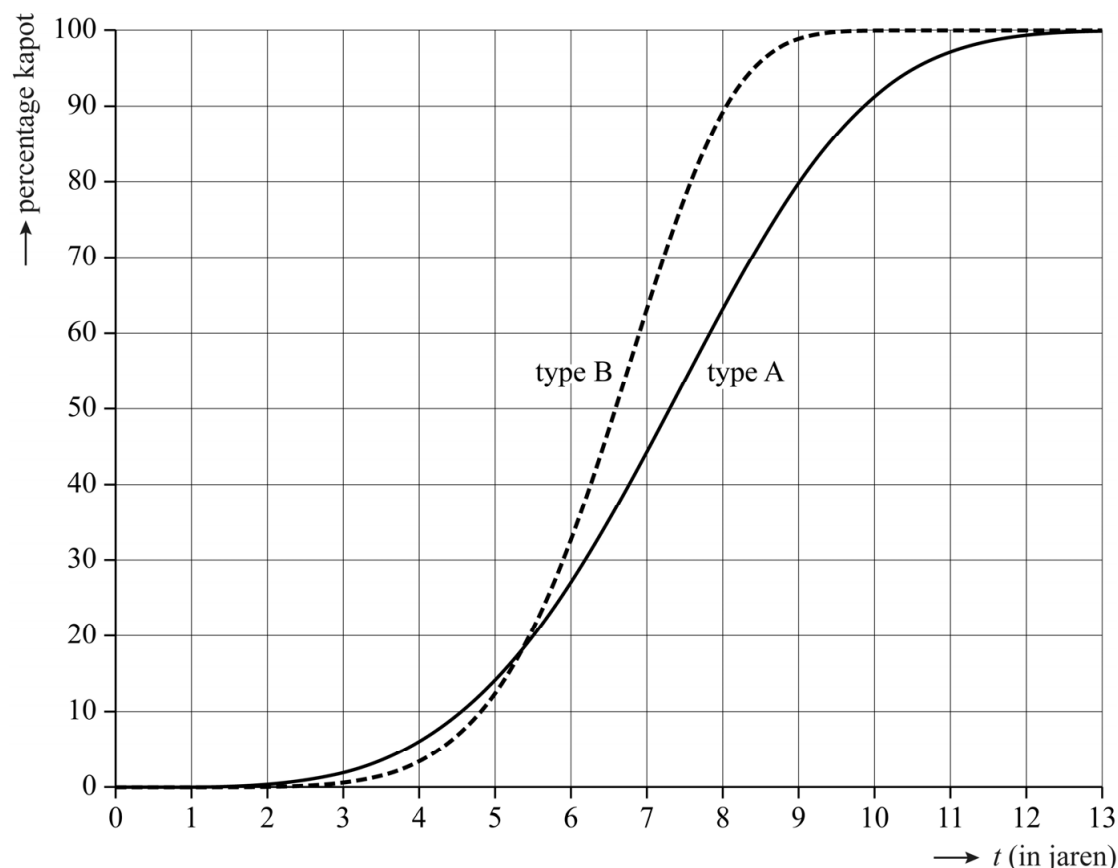
- 3p **15** Leg van elke uitspraak uit of deze juist is.

Levensduur van apparaten

Een apparaat, zoals een vaatwasser of een stofzuiger, gaat na verloop van tijd een keer kapot. Het apparaat is dan aan het einde van zijn levensduur.

Een fabrikant heeft jarenlang onderzoek gedaan naar de levensduur van twee van zijn vaatwassers: type A en type B. De onderzoeksresultaten zijn verwerkt in de figuur.

figuur percentage kapotte vaatwassers na t gebruiksjaren



In de figuur kun je bijvoorbeeld aflezen dat van beide typen vaatwassers 80% nog werkte na ongeveer 5,5 gebruiksjaren.

Het aantal gebruiksjaren t waarbij 25% van de vaatwassers nog werkte, is voor type A en type B verschillend.

- 3p **16** Bepaal het verschil in jaren tussen deze twee aantallen gebruiksjaren. Geef je antwoord in één decimaal en licht je antwoord toe.

Fabrikanten gebruiken formules om het percentage P van de apparaten dat kapot is na t gebruiksjaren te schatten. Zo'n formule is van de vorm:

$$P = 100 \cdot \left(1 - 0,368 \left(\frac{t}{s} \right)^v \right) \quad (\text{formule 1})$$

Hierin zijn s en v vaste waarden, die horen bij een bepaald apparaat.

Een fabrikant gebruikt formule 1 voor de levensduur van zijn broodroosters. Bij de broodroosters horen $s = 4$ en $v = 2$. Formule 1 is dan te herleiden tot:

$$P = 100 - 100 \cdot 0,368^{0,0625} \cdot t^2 \quad (\text{formule 2})$$

Met P het percentage van de apparaten dat kapot is na t gebruiksjaren.

4p **17** Geef deze herleiding.

3p **18** Bereken hoeveel procent van de broodroosters volgens formule 2 gedurende het derde gebruiksjaar kapot zal gaan. Geef je antwoord in hele procenten.

Op den duur gaan alle broodroosters een keer kapot.

3p **19** Beredeneer dit met behulp van formule 2, zonder gebruik te maken van getallenvoorbeelden.

Een fabrikant gebruikt formule 1 voor de levensduur van zijn stofzuigers. Bij de stofzuigers hoort $v = 3$. Uit een marktonderzoek is bekend dat 736 van de 920 verkochte stofzuigers kapot waren na zes gebruiksjaren.

4p **20** Bereken met behulp van formule 1 de waarde van s die bij deze stofzuigers hoort. Geef je antwoord in één decimaal.

Eitje koken op vakantie

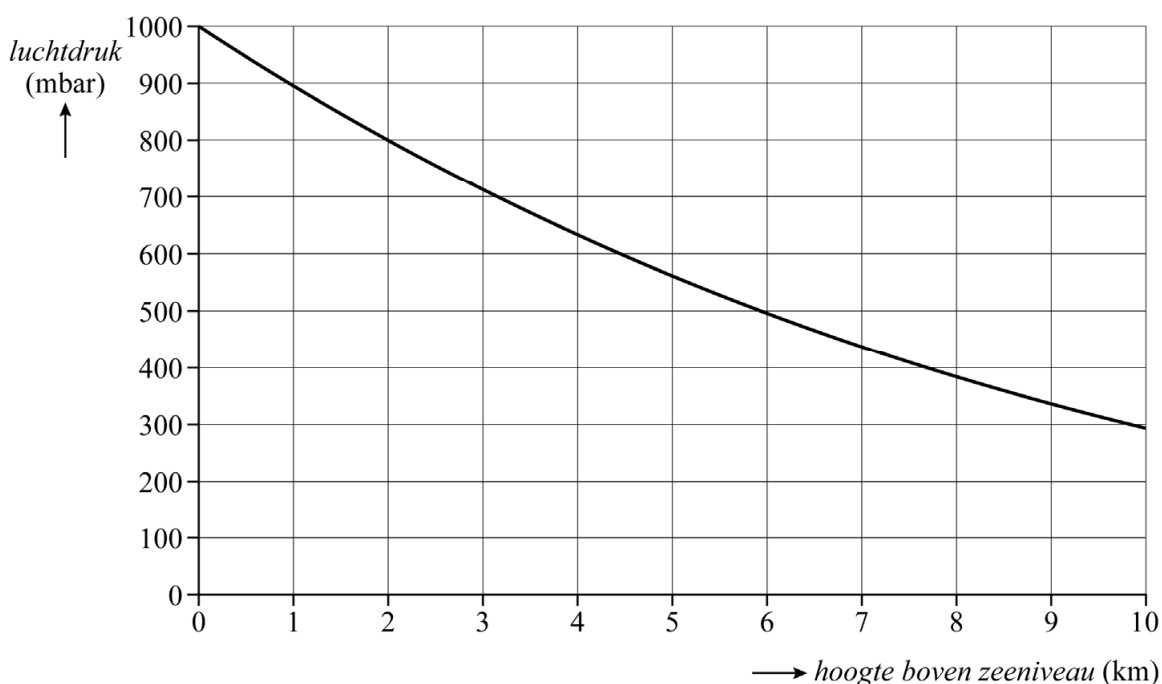
Richard gaat in de zomer op kampeervakantie, eerst naar de Zuid-Franse kust op zeeniveau en later naar de Franse Alpen op 2000 meter boven zeeniveau. Op beide plaatsen gaat hij dagelijks een ei koken met dezelfde gasbrander, dezelfde pan en evenveel water met dezelfde begintemperatuur. Hij vraagt zich af op welke plaats het bereiden van het ei het langst zal duren.



Om het ei te bereiden, warmt Richard eerst het water van $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ op tot de kooktemperatuur. De opwarming verloopt op beide plaatsen lineair met een snelheid van $14,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ per minuut. Zodra het water kookt, legt hij er een ei in en laat dit net zo lang in het kokende water liggen tot het hardgekookt is.

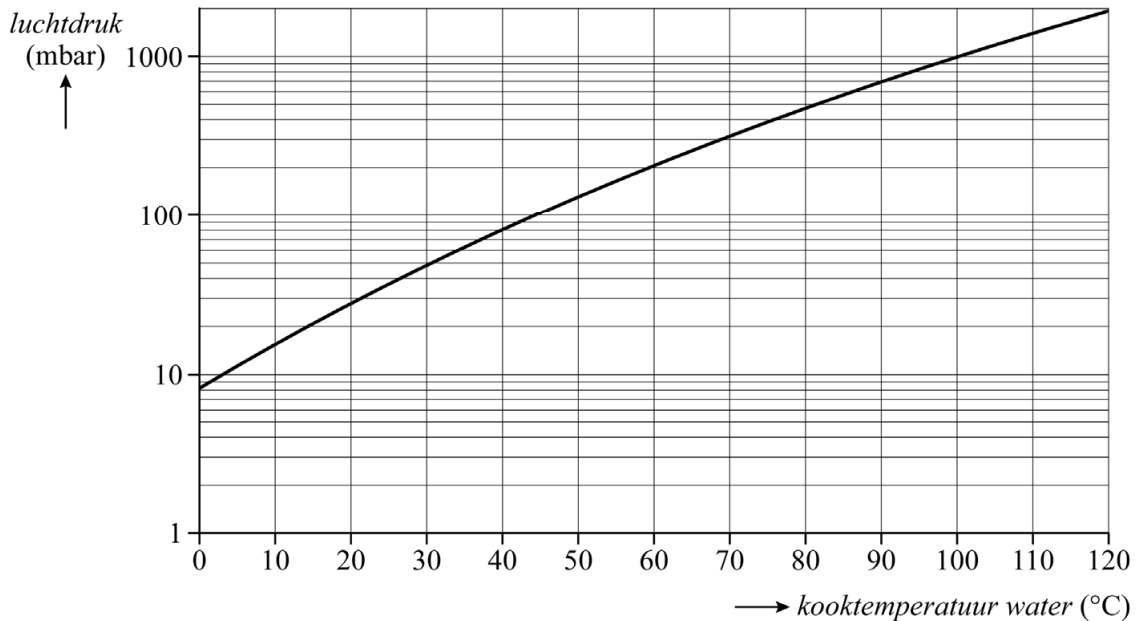
De luchtdruk in de bergen is lager dan op zeeniveau. Zie figuur 1, waarin het verband is weergegeven tussen de luchtdruk en de hoogte boven zeeniveau.

figuur 1



Door de lagere luchtdruk in de bergen, kookt water daar bij een lagere temperatuur dan op zeeniveau. Zie figuur 2, waarin het verband is weergegeven tussen de luchtdruk en de temperatuur waarbij water kookt.

figuur 2



Het duurt in de bergen dus korter om het water aan de kook te brengen. Maar door de lagere kooktemperatuur moet een ei op 2000 meter boven zeeniveau 2 minuten langer in het kokende water liggen dan op zeeniveau tot het hardgekookt is. De totale tijd die nodig is om water aan de kook te brengen en om het ei te koken tot het hardgekookt is, noemen we de **bereidingstijd**.

- 7p 21 Onderzoek of de bereidingstijd van een ei op 2000 meter boven zeeniveau langer of korter is dan op zeeniveau **en** bereken het verschil in bereidingstijd. Geef je antwoord in hele seconden.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.