

Examen HAVO
2026

tijdvak 1
dinsdag 19 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A

Dit examen bestaat uit 20 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 75 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Vuistregels voor de grootte van het verschil van twee groepen

2×2-kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, met $\phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$,

waarin a , b , c en d absolute aantallen zijn

- als $\phi < -0,4$ of $\phi > 0,4$, dan zeggen we “het verschil is groot”
- als $-0,4 \leq \phi < -0,2$ of $0,2 < \phi \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”
- als $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dan zeggen we “het verschil is gering”

Maximaal verschil in cumulatief percentage ($\max V_{cp}$)

(met voor beide groepen een steekproefomvang $n > 100$)

- als $\max V_{cp} > 40$, dan zeggen we “het verschil is groot”
- als $20 < \max V_{cp} \leq 40$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”
- als $\max V_{cp} \leq 20$, dan zeggen we “het verschil is gering”

Effectgrootte $E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$, met $\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$ de steekproefgemiddelden

($\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$), S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0,8$, dan zeggen we “het verschil is groot”
- als $0,4 < E \leq 0,8$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”
- als $E \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is gering”

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen¹⁾ elkaar niet overlappen, dan zeggen we “het verschil is groot”
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”
- in alle andere gevallen zeggen we “het verschil is gering”

noot 1 De ‘box’ is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, met p de steekproefproportie en n de steekproefomvang.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, met $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, n de steekproefomvang en S de steekproefstandaardafwijking.

Steeds minder bos

Volgens de Voedsel- en Landbouworganisatie van de Verenigde Naties was de (totale) bosoppervlakte over de gehele wereld in 1990 ongeveer 4240 miljoen hectare (ha). Deze oppervlakte is in de periode 1990-2020 steeds kleiner geworden. Zie de tabel. Hierin worden drie perioden van elk 10 jaar onderscheiden.

tabel

jaarlijkse verandering bosoppervlakte		
periode	verandering (in miljoen ha/jaar)	verandering (in %/jaar)
1990-2000	-7,84	-0,19
2000-2010	-5,17	-0,13
2010-2020	-4,74	-0,12

In de volgende twee vragen gaan we met gegevens uit de tabel op twee manieren de bosoppervlakte in 2020 berekenen.

Neem aan dat de bosoppervlakte in elk van de drie onderscheiden perioden lineair afnam.

- 3p **1** Bereken met de bosoppervlakte in 1990 en met de gegevens in de kolom 'verandering (in miljoen ha/jaar)' de bosoppervlakte in 2020. Geef je antwoord in een geheel aantal miljoen hectare.

Neem nu aan dat de bosoppervlakte in elk van de drie onderscheiden perioden exponentieel afnam.

- 3p **2** Bereken met de bosoppervlakte in 1990 en met de gegevens in de kolom 'verandering (in %/jaar)' de bosoppervlakte in 2020. Geef je antwoord in een geheel aantal miljoen hectare.

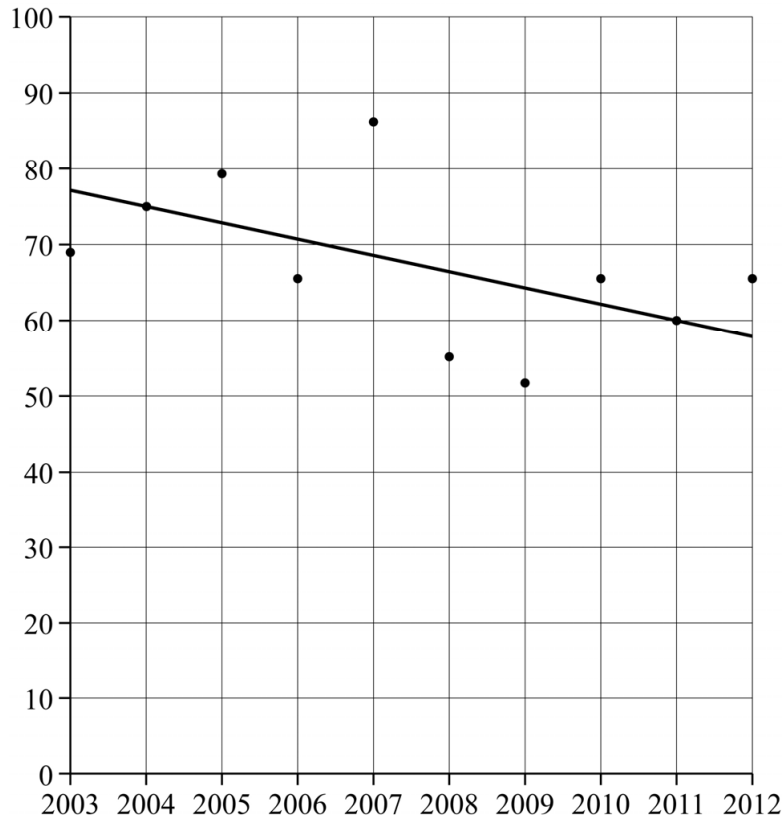
De Verenigde Naties hebben in 2017 als doel gesteld dat de bosoppervlakte in de wereld in 2030 met 3% gestegen moet zijn ten opzichte van 2015.

We gaan ervan uit dat dit percentage bereikt moet worden door een vast groeipercentage per jaar vanaf 2015. We kunnen op basis hiervan berekenen hoe groot dit jaarlijkse groeipercentage dan moet zijn.

- 4p **3** Bereken dit jaarlijkse groeipercentage. Geef je antwoord in één decimaal.

Er is ook onderzoek gedaan naar de bosoppervlakte die is verbrand. In een wetenschappelijk artikel stond de onderstaande figuur over hoeveel bosoppervlakte in de periode 2003-2012 is verbrand. In de figuur staan tien meetpunten afgebeeld. Op basis van deze punten is een lijn getrokken die zo goed mogelijk bij deze meetpunten past.

figuur **verbrande bosoppervlakte (in miljoenen ha)**



Voor deze lijn kan een formule worden opgesteld van de vorm:

$$B = \dots \cdot t + \dots$$

Hierin is B de verbrande bosoppervlakte (in miljoenen hectare) en t het aantal jaren na 2003. Op de puntjes moeten getallen komen te staan.

- 3p **4** Bereken deze getallen aan de hand van de gegevens van 2004 en 2011. Geef de getallen in één decimaal.

Fitnesscentra

Op 1 januari 2015 telde Nederland 1970 fitnesscentra. Op 1 januari 2019 was dit aantal lineair gegroeid tot 2200 fitnesscentra.

Ga ervan uit dat ook in de jaren daarna het aantal fitnesscentra in Nederland op dezelfde manier lineair blijft groeien.

- 4p **5** Bereken op 1 januari van welk jaar er voor het eerst meer dan 3000 fitnesscentra in Nederland zullen zijn.

De fitnesscentra in Nederland hadden op 1 januari 2015 ruim 2,1 miljoen klanten. Op 1 januari 2019 was dit opgelopen tot bijna 2,6 miljoen. Zie de tabel. Hierin worden de fitnesscentra onderverdeeld op basis van het aantal werknemers.

tabel aantal klanten (×1000) van fitnesscentra in Nederland

	2015	2017	2019
0 tot 3 werknemers	352	337	325
3 tot 5 werknemers	214	236	226
5 tot 10 werknemers	322	308	315
10 of meer werknemers	1241	1476	1720
totaal	2129	2357	2586

Iemand beweert dat de procentuele toename van het aantal klanten in de periode van 1 januari 2015 tot 1 januari 2019 het grootst is bij fitnesscentra met 10 of meer werknemers.

- 3p **6** Onderzoek of deze bewering juist is.

In de rest van deze opgave kijken we naar de ontwikkeling van het totaal aantal klanten van de fitnesscentra in Nederland. We gaan op zoek naar een formule waarmee deze ontwikkeling beschreven kan worden. De formule moet voldoen aan de volgende eisen:

- 1 Op 1 januari 2019 zijn er 2,586 miljoen klanten.
- 2 Vanaf 1 januari 2019 neemt het aantal klanten steeds toe.
- 3 Op den duur bereikt het aantal klanten net niet de waarde van 3 miljoen.

Eerst kijken we naar formules van de vorm:

$$N = b \cdot g^t \quad (\text{formule 1})$$

Hierin is N het aantal klanten (in miljoenen), t het aantal jaren na 1 januari 2019 en b en g zijn getallen.

Formules van deze vorm kunnen niet tegelijkertijd aan alle drie de genoemde eisen voldoen.

- 3p **7** Leg voor elk van de drie genoemde eisen uit of formules van de vorm van formule 1 er aan kunnen voldoen.

De volgende formule voldoet wel aan alle drie de eisen:

$$N = \frac{3}{1 + 0,16 \cdot 0,92^t} \quad (\text{formule 2})$$

Hierin is N het aantal klanten (in miljoenen) en t het aantal jaren na 1 januari 2019.

- 4p **8** Toon aan dat formule 2 aan alle drie de eisen voldoet.
- 5p **9** Bereken met behulp van formule 2 in welk jaar het aantal klanten voor het eerst minder dan 5% van de waarde van 3 miljoen af ligt.

Examenresultaten

In de onderstaande tabel staan voor twee examenjaren voor alle havo-kandidaten het slaagpercentage en het aantal kandidaten per profiel.

tabel

	2019		2020	
	slaagpercentage (in %)	aantal kandidaten	slaagpercentage (in %)	aantal kandidaten
natuur en techniek	91,4	11 142	97,2	10 509
natuur en gezondheid	86,3	11 708	97,2	11 868
economie en maatschappij	87,8	26 136	97,6	26 173
cultuur en maatschappij	88,1	5726	98,4	5904

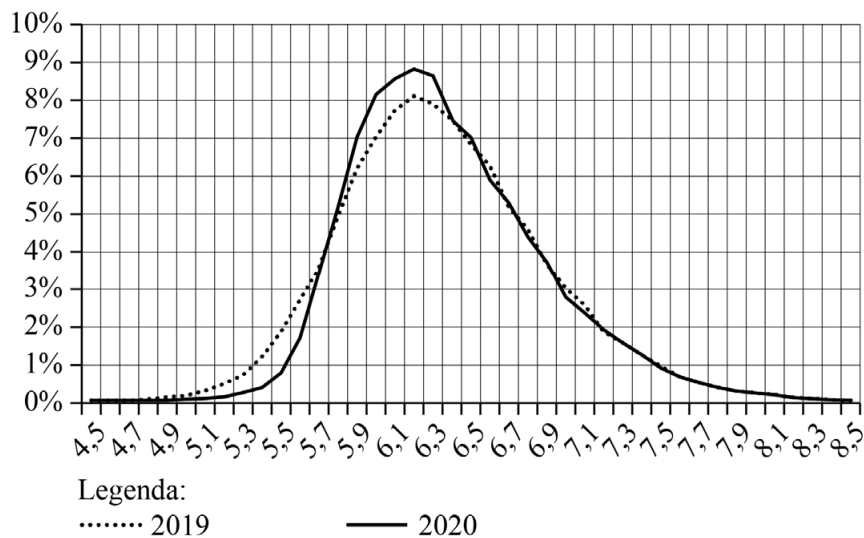
- 2p **10** Leg uit waarom het niet zinvol is om bij de slaagpercentages in de tabel de 95%-betrouwbaarheidsintervallen te vermelden.

In 2019 is er op de havo een verschil in het slaagpercentage tussen de profielen natuur en techniek en cultuur en maatschappij. Er was geen enkele leerling die beide profielen had.

- 4p **11** Onderzoek met behulp van het formuleblad of dit verschil in slaagpercentages tussen deze twee profielen groot, middelmatig of gering is.

In de onderstaande figuur staan de frequentieverdelingen van de gemiddelde SE-cijfers¹⁾ die de havo-kandidaten hebben behaald in 2019 en 2020.

figuur **percentage havo-kandidaten dat een bepaald gemiddeld SE-cijfer (van alle vakken) heeft behaald in 2019 en 2020**



- 2p **12** Leg voor de grafiek van 2020 uit waarom er geen sprake is van een normale verdeling.

Aan de hand van de figuur kan beredeneerd worden of het gemiddelde van de gemiddelde SE-cijfers in 2020 lager of hoger was dan in 2019. Er kan ook beredeneerd worden of de standaardafwijking van de gemiddelde SE-cijfers in 2020 kleiner of groter was dan in 2019. Er zijn vier mogelijkheden:

- I In 2020 is het gemiddelde hoger en is de standaardafwijking groter dan in 2019.
- II In 2020 is het gemiddelde hoger en is de standaardafwijking kleiner dan in 2019.
- III In 2020 is het gemiddelde lager en is de standaardafwijking groter dan in 2019.
- IV In 2020 is het gemiddelde lager en is de standaardafwijking kleiner dan in 2019.

- 3p **13** Welke van de vier genoemde mogelijkheden is juist? Licht je antwoord toe met redeneringen.

Stel dat de verdeling van de gemiddelde SE-cijfers van de havo-kandidaten in een bepaald jaar wel normaal verdeeld was, met gemiddelde 6,2 en standaardafwijking 0,5.

- 3p **14** Bereken het percentage van de havo-kandidaten dat dan in dat jaar een gemiddeld SE-cijfer tussen 5,7 en 7,2 zou hebben gehaald.

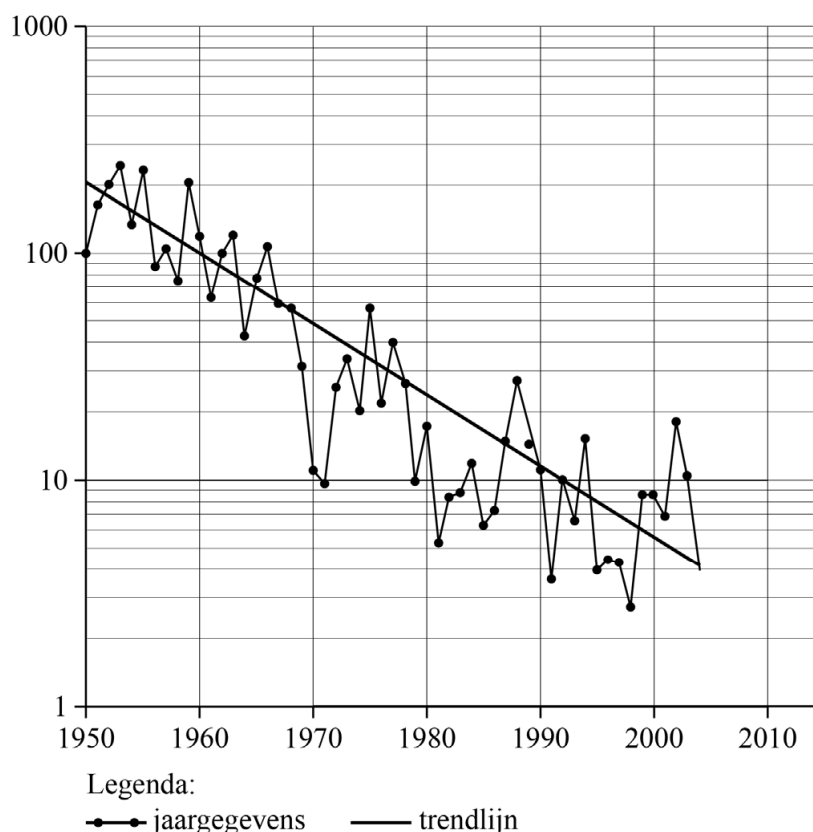
noot 1 SE staat voor schoolexamen. Het gemiddelde SE-cijfer is het gewogen gemiddelde van de gemiddelde SE-eindcijfers van alle vakken waarbij ook een centraal examen wordt afgenomen.

Ga verder op de volgende pagina.

Palingen

Palingen zijn vissen die op de lijst van bedreigde diersoorten staan. In Europa is de palingstand (het aantal palingen) in de periode 1950-2004 sterk gedaald. Dit is te zien aan de **indexcijfers** in de figuur. De verticale as, waarop de indexcijfers staan, heeft een logaritmische schaalverdeling. De indexcijfers geven aan hoeveel procent de palingstand in een bepaald jaar is ten opzichte van een gekozen basisjaar. Het basisjaar in de figuur is 1950, dus het indexcijfer van 1950 is 100. Het indexcijfer van 1969 is 32. Dit betekent dat in 1969 de palingstand 32 procent is van de palingstand in 1950.

figuur indexcijfers palingstand in Europa 1950-2004



De rechte lijn in de figuur geeft de trend weer. Als het indexcijfer van de palingstand in Europa precies volgens deze lijn zou afnemen, dan zou er sprake zijn van een vast afnamepercentage per jaar.

- 5p **15** Bereken dit jaarlijkse afnamepercentage met behulp van de waarden voor 1960 en 1992 op deze lijn. Geef je antwoord in één decimaal.

Er wordt al jaren onderzoek gedaan naar het leven van palingen. Palingen komen 6000 km van Nederland in de Sargassozee uit het ei en groeien uit tot larven. Tijdens de reis met de Atlantische Golfstroom naar de Europese kust ontwikkelen de larven zich tot glasaal. Vanuit de Noordzee trekken de glasalen naar de Nederlandse binnenwateren om daar uit te groeien tot volwassen palingen.

De lengte van een paling in Nederland kan benaderd worden met de formule:

$$L = 7,3 + 3t \quad (\text{formule 1})$$

Hierin is L de lengte (in cm) en t de tijd (in jaren) die de paling in Nederland doorbrengt.

Het gewicht van een paling tijdens zijn verblijf in Nederland kan benaderd worden met de formule:

$$G = 0,0008 \cdot L^{3,2049} \quad (\text{formule 2})$$

Hierin is G het gewicht (in grammen) en L de lengte (in cm).

Na een aantal jaren vertrekken de palingen uit Nederland en zwemmen ze terug naar de Sargassozee om zich daar voort te planten. Mannelijke palingen hebben bij hun vertrek uit Nederland een gewicht van ongeveer 148 gram.

- 5p **16** Bereken hoeveel tijd deze mannelijke palingen in Nederland hebben doorgebracht. Geef je antwoord in gehele maanden.

De conditie van een paling wordt berekend met de formule:

$$C = \frac{100G}{L^3} \quad (\text{formule 3})$$

Hierin is C de conditie, G het gewicht (in grammen) en L de lengte (in cm).

Stel dat de lengte van een paling met 50% toeneemt.

- 4p **17** Bereken met welk percentage het gewicht van deze paling moet toenemen om ervoor te zorgen dat de conditie gelijk blijft.

Door de formules 2 en 3 te combineren, is een formule van de volgende vorm af te leiden:

$$C = 0,08 \cdot L^{0,2} \quad (\text{formule 4})$$

Hierin is C de conditie en L de lengte (in cm).

Het getal 0,2 in formule 4 is een afgerond getal.

3p **18** Bereken dit getal in vier decimalen.

Voor de gemiddelde zwemsnelheid van een paling geldt:

$$v = 0,5 \cdot L \quad (\text{formule 5})$$

Hierin is v de gemiddelde zwemsnelheid (in cm/s) en L de lengte (in cm).

Ga uit van een paling met een conditie van 0,191.

5p **19** Bereken met de formules 4 en 5 hoeveel dagen deze paling doet over een reis van 6000 km (van Nederland naar de Sargassozee).
Geef je antwoord in hele dagen.

Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

2,6 miljard T-rexen?

Er wordt veel onderzoek gedaan naar T-rexen, een dinosaurussoort die miljoenen jaren geleden op aarde leefde en nu is uitgestorven. Om te berekenen hoeveel T-rexen er op enig moment leefden, worden de volgende aannames gedaan:

- Het leefgebied van de T-rexen was steeds 2 miljoen vierkante kilometer.
- Er leefden gemiddeld genomen steeds 10 T-rexen in een leefgebied van duizend vierkante kilometer.
- Er hebben gedurende 2,5 miljoen jaar T-rexen op aarde geleefd.
- Een T-rex werd gemiddeld genomen 19 jaar oud.



Op basis van deze aannames hebben onderzoekers van de Berkeley-universiteit in Californië berekend dat er dan in totaal zo'n 2,6 miljard T-rexen op aarde geleefd moeten hebben.

De onderzoekers hebben aangegeven dat zij de gemiddelde leeftijd van een T-rex niet heel precies hebben kunnen vaststellen. Het is dus denkbaar dat T-rexen gemiddeld genomen geen 19 jaar, maar bijvoorbeeld 21 jaar oud werden. Een hogere waarde van de gemiddelde leeftijd van een T-rex zal leiden tot een lagere schatting van het aantal T-rexen dat op aarde geleefd moet hebben.

Neem aan dat de gemiddelde leeftijd van een T-rex hoger dan 19 jaar is geweest.

- 7p **20** Onderzoek hoeveel hele jaren ouder dan 19 jaar de T-rexen gemiddeld genomen maximaal kunnen zijn, zodat er nog steeds naar schatting minstens 2 miljard T-rexen op aarde geleefd moeten hebben.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.