Examen VWO

2025

tijdvak 2
woensdag 18 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd.
Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

OVERZICHT FORMULES

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x)=f(x)+g(x)$	$s'(x)=f'(x)+g'(x)$
verschilregel	$v(x)=f(x)-g(x)$	$v'(x)=f'(x)-g'(x)$
productregel	$p(x)=f(x)\cdot g(x)$	$p'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x)=f(g(x))$	$k'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\cdot\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

Logaritmen

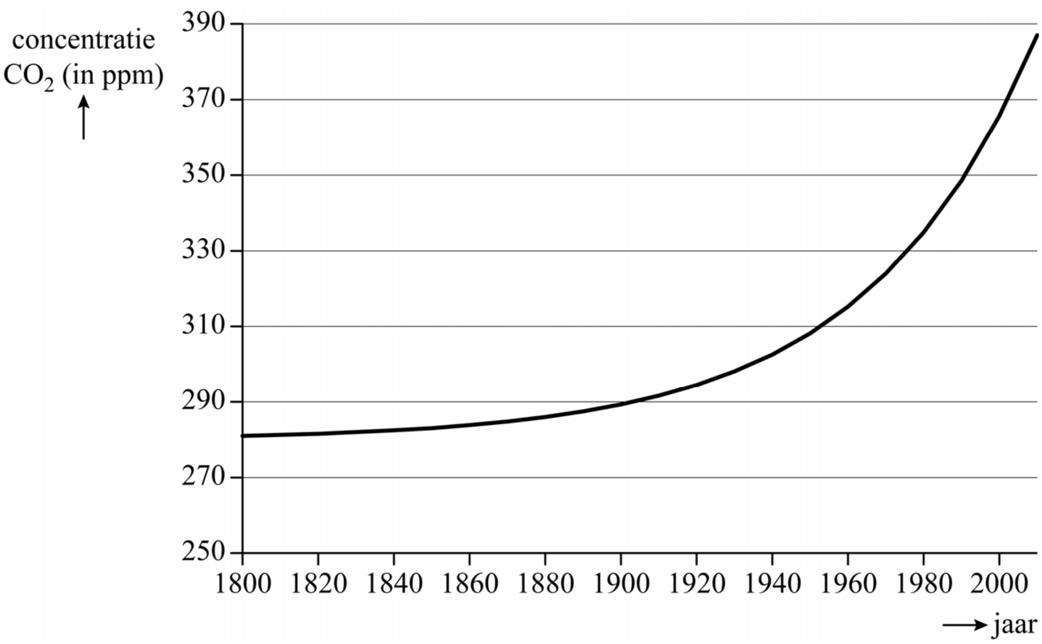
regel	voorwaarde
${}^{g}\log(a)+{}^{g}\log(b)={}^{g}\log(ab)$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^{g}\log(a)-{}^{g}\log(b)={}^{g}\log\left(\dfrac{a}{b}\right)$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^{g}\log\left(a^{p}\right)=p\cdot{}^{g}\log(a)$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^{g}\log(a)=\dfrac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Ga verder op de volgende pagina.

CO_2 in de atmosfeer

In deze opgave kijken we naar het verloop van de concentratie CO_2 in de atmosfeer. Onderzoekers hebben geconstateerd dat de natuurlijke concentratie CO_2 eeuwenlang stabiel is gebleven rond de 280 ppm (parts per million). De toename van de concentratie CO_2 sinds de industriële revolutie wordt met name veroorzaakt door massaproductie van goederen en voedsel.
In de figuur zie je het verloop van de concentratie CO_2 in de periode 1800–2009.

figuur



De toename verloopt exponentieel. Het verloop van de concentratie CO_2 kan worden benaderd met het model:

$$C = 280 + g^t$$

Hierbij is C de concentratie CO_2 in ppm en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1800. De waarde 280 staat in dit model voor de constante natuurlijke concentratie CO_2.

Op 1 januari 2002 was de concentratie CO_2 370 ppm. Met dit gegeven en met behulp van bovenstaande gegevens is te berekenen dat de waarde van g, afgerond op vier decimalen, gelijk is aan 1,0225.

3p **1** Bereken de waarde van g in vijf decimalen.

3p **2** Bereken in welk jaar de concentratie CO_2 verdubbeld zal zijn ten opzichte van de natuurlijke concentratie.

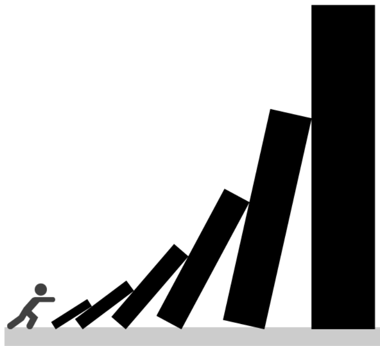
Zoals je in de figuur kunt zien is de grafiek toenemend stijgend. De formule $C = 280 + 1{,}0225^t$ benadert deze stijging.

Vanaf 1800 duurde het 150 jaar totdat de concentratie CO_2 met (ongeveer) 10% was toegenomen. Vanaf 1950 duurde het veel korter totdat de volgende 10% stijging van de concentratie CO_2 werd gemeten.

4p **3** Bereken hoeveel gehele jaren hiervoor nodig waren.

Domino-effect

Een rij dominostenen wordt achter elkaar gezet. Vervolgens wordt de eerste dominosteen omgeduwd, waarna de rest van de rij (als het goed is) ook omvalt. Dit wordt het **domino-effect** genoemd, waarbij kleine dominostenen ook grotere kunnen omduwen.



Deze opgave gaat over dit domino-effect, waarbij we dominostenen bekijken die telkens 1,5 keer zo hoog zijn als de voorgaande steen.

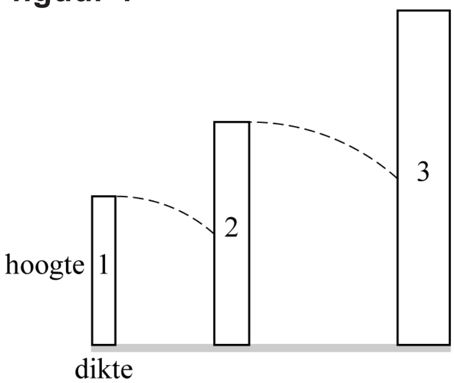
Een Amerikaan beweert dat wanneer de 13^{e} dominosteen 1 meter hoog is, de 29^{e} dominosteen hoger is dan het Empire State Building.
Het Empire State Building is een wolkenkrabber in New York, met een hoogte van 381 meter.

2p **4** Ga met een berekening na of deze Amerikaan gelijk heeft.

In figuur 1 zie je een zijaanzicht van drie dominostenen. We nemen in het vervolg van deze opgave het volgende aan:

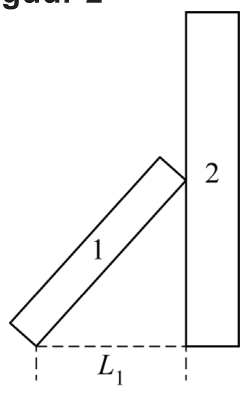
– De hoogte van de eerste dominosteen is 48 mm.
– De dikte van de eerste dominosteen is 7,5 mm.
– Iedere volgende dominosteen is 1,5 keer zo hoog en 1,5 keer zo dik als de voorgaande.
– Iedere dominosteen valt tegen het midden van de volgende dominosteen.
– Als de dominostenen op een rij worden gezet, dan krijgt de kleinste steen nummer 1, de volgende steen nummer 2, enzovoorts.

figuur 1



Doordat de eerste dominosteen tegen het midden van de tweede steen moet vallen, ligt de afstand L_1 vast. Zie figuur 2.
Voor de dominostenen 1 en 2 is deze afstand te berekenen met de formule $L_1 = \sqrt{h_1^{\ 2} - (0{,}5 \cdot h_2)^2}$.
Hierbij is L_1 de afstand tussen dominostenen 1 en 2, h_1 de hoogte van dominosteen 1 en h_2 de hoogte van dominosteen 2, alle in mm.

figuur 2



2p **5** Bereken de afstand tussen dominosteen 1 en 2 in gehele mm.

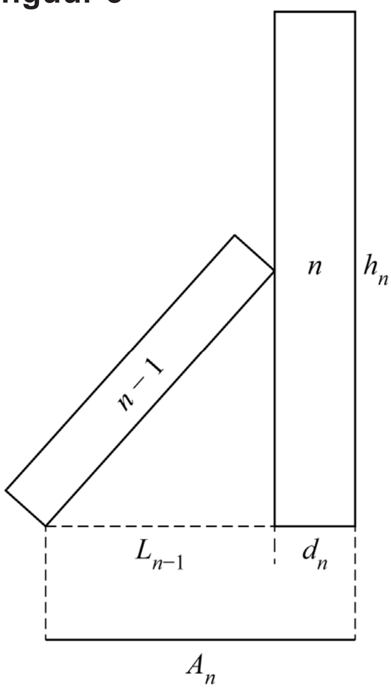
Voor de hoogte van dominosteen 2 geldt $h_2 = 1,5 \cdot h_1$.

Door dit in te vullen in de formule $L_1 = \sqrt{{h_1}^2 - (0,5 \cdot h_2)^2}$ is de afstand L_1 ook te schrijven als $L_1 = a \cdot h_1$.

De waarde van a is afgerond op twee decimalen 0,66.

3p **6** Herleid de formule $L_1 = \sqrt{{h_1}^2 - (0,5 \cdot h_2)^2}$ tot $L_1 = a \cdot h_1$ en geef de waarde van a in drie decimalen.

figuur 3



In figuur 3 zie je de algemene situatie.
Er geldt (voor $n \geq 2$):

- $h_n = 48 \cdot 1,5^{n-1}$, met h_n de hoogte in mm
- $d_n = 7,5 \cdot 1,5^{n-1}$, met d_n de dikte in mm
- $L_n = 0,66 \cdot h_n$, met L_n de afstand in mm tussen dominosteen n en de dominosteen links daarvan
- $A_n = L_{n-1} + d_n$

Uit bovenstaande gegevens volgt (voor $n \geq 2$):

$$A_n = 19,08 \cdot 1,5^n$$

3p **7** Toon dit aan.

foto

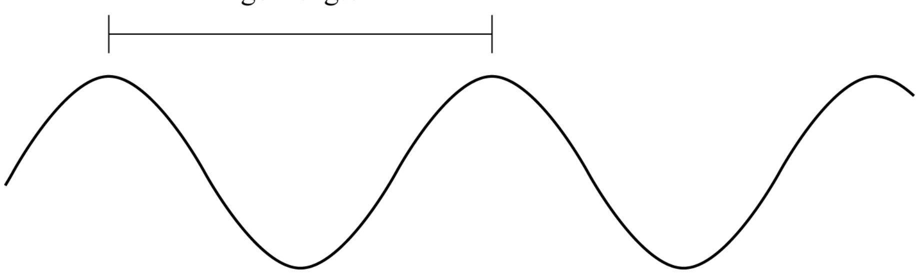
In het televisieprogramma MythBusters werd een experiment bedacht waarbij na het omduwen van de eerste dominosteen uiteindelijk dominosteen nummer 12 op een auto valt. Om het experiment uit te voeren werd een 15 meter lange parkeerplaats gebruikt.

4p **8** Onderzoek of deze parkeerplaats lang genoeg is om het experiment uit te voeren.

Scheepsgolven

Golven op het water kunnen op verschillende manieren ontstaan, bijvoorbeeld door wind of door schepen. In deze opgave bekijken we golven die ontstaan door een varend schip. De **golflengte** is de afstand tussen twee opeenvolgende golftoppen. Zie figuur 1.

figuur 1



Golven verplaatsen zich over het water. De snelheid waarmee een golf zich over het water verplaatst, is afhankelijk van de golflengte. Het verband tussen de golflengte en de snelheid waarmee een golf zich verplaatst, wordt gegeven door de volgende formule:

$$V = 1,25 \cdot \sqrt{L} \qquad \text{(formule 1)}$$

Hierbij is L de golflengte in meters en V de snelheid waarmee de golf zich verplaatst in meter per seconde.
Als L toeneemt, dan neemt ook V toe. De grafiek van V is dus stijgend.

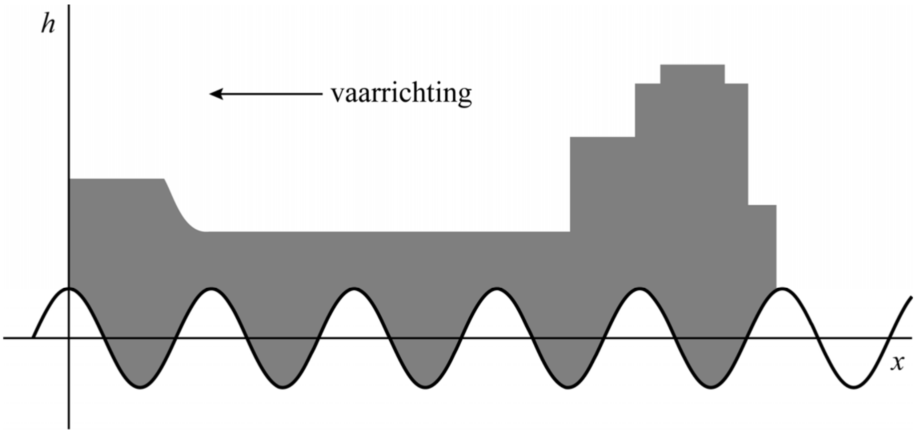
4p **9** Stel een formule op voor de afgeleide van V en beredeneer met behulp hiervan of de stijging afnemend of toenemend is.

Als de golflengte twee keer zo groot wordt, dan neemt de snelheid van de golf met een vaste factor toe.

2p **10** Bereken, zonder een getallenvoorbeeld te gebruiken, deze factor. Geef je antwoord in twee decimalen.

Een schip en de golf die door dat varende schip ontstaat, verplaatsen zich met gelijke snelheid (samen) door het water. Als een schip langzaam vaart, dan ontstaat er langs het schip een golf zoals in figuur 2. Er zijn dan meerdere toppen van de golf zichtbaar langs de zijkant van het schip. In figuur 2 is tevens een assenstelsel toegevoegd.

figuur 2



De voorkant van het schip valt samen met een top van de golf. Omdat het schip en de golf samen dezelfde kant op bewegen, blijft die top tijdens het varen samenvallen met de voorkant van het schip.

Een schip van 30 meter lang vaart met een snelheid van 3 meter per seconde. De golf die door het varen ontstaat heeft een amplitude van 15 centimeter. De golf is te beschrijven met de formule:

$$h = 15 \cdot \sin(a(x-b)) \qquad \text{(formule 2)}$$

Hierbij is h de hoogte ten opzichte van de evenwichtsstand in centimeters en x de afstand vanaf de voorkant van het schip in meters, met $0 \le x \le 30$. De waarden van a en b in formule 2 zijn te berekenen door gebruik te maken van formule 1.

5p **11** Bereken a en b in formule 2. Geef a en b in twee decimalen.

Om de hoogte van de golven van een schip te verkleinen, is de **bulbsteven** uitgevonden. De bulbsteven is een uitstekende bult aan de voorkant van een schip. Zie de foto.

foto

Normaal gesproken bevindt de bulbsteven zich (grotendeels) onder water. Omdat het schip op de foto geen lading vervoert, is de bulbsteven boven water zichtbaar.

Zowel het schip als de bulbsteven veroorzaken een golf. De golf van de bulbsteven dempt de golf van het schip gedeeltelijk. Een schip met een lengte van 100 meter veroorzaakt bij een bepaalde vaarsnelheid een golf met de formule:

$$h_{schip}(x) = 50 \cdot \sin(\tfrac{\pi}{15}(x + 7{,}5))$$

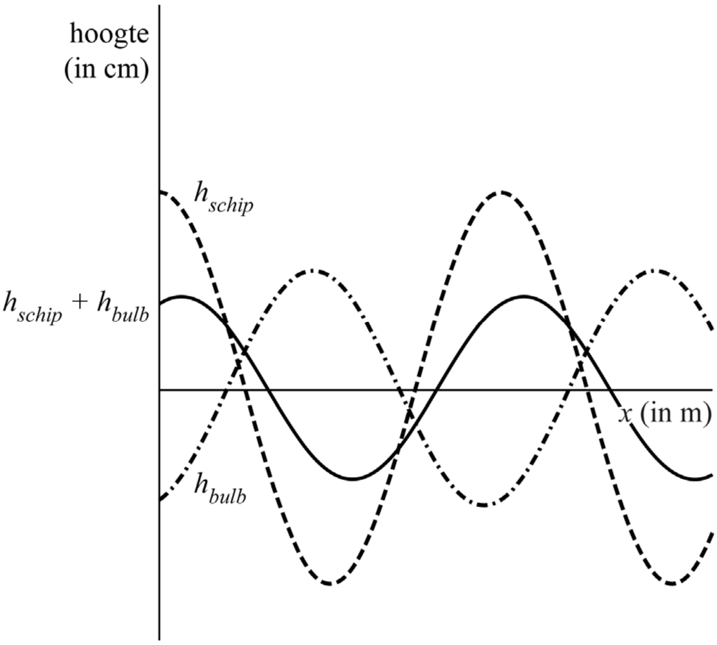
en de bulbsteven van het schip veroorzaakt een golf met de formule:

$$h_{bulb}(x) = 30 \cdot \sin(\tfrac{\pi}{15}(x - 6))$$

Hierbij zijn h_{schip} en h_{bulb} de hoogtes ten opzichte van de evenwichtsstand in centimeters en is x de afstand vanaf de voorkant van het schip in meters met $0 \leq x \leq 100$.

De formule die hoort bij de gecombineerde golf van het schip en de bulbsteven wordt verkregen door h_{schip} en h_{bulb} op te tellen. Zie figuur 3.

figuur 3



De amplitude van de gecombineerde golf is kleiner dan de amplitude van de golf van het schip zonder de bulbsteven.

4p **12** Bereken hoeveel de amplitude van de gecombineerde golf kleiner is dan de amplitude van de golf van het schip zonder de bulbsteven. Geef je antwoord in gehele centimeters.

Ga verder op de volgende pagina.

Batterijspanning

In het dagelijks leven worden er veel batterijen gebruikt om apparaten te laten werken. Een batterij werkt door het verschil in spanning tussen de pluspool en de minpool. Dit spanningsverschil noemen we de **totale spanning** van de batterij. Deze totale spanning wordt lager als je de batterij enige tijd hebt gebruikt. Hierdoor gaat bijvoorbeeld een fietslamp met een batterij op een gegeven moment minder fel branden.

Een van de eerste batterijen werd in 1836 uitgevonden door de Britse scheikundige Daniell. Bij deze batterij werd bij de pluspool koper en bij de minpool zink gebruikt. Deze opgave gaat over zo'n batterij.

De spanningen van de polen van deze batterij zijn te berekenen met de volgende formules:

$$V_{plus} = 0,34 + 0,0296 \cdot \log(k)$$

$$V_{min} = -0,76 + 0,0296 \cdot \log(z)$$

Hierin zijn V_{plus} en V_{min} de spanningen van de polen in volt en k en z de concentraties van koper en zink in molair[1].

De totale spanning van de batterij, $V_{batterij}$, is het verschil tussen de spanningen van beide polen:

$$V_{batterij} = V_{plus} - V_{min}$$

Bij de batterij geldt in het begin dat k en z allebei 1 molair zijn. De totale spanning is dan 1,1 volt. Door het gebruik van de batterij neemt k af en neemt z toe. Als deze batterij enige tijd stroom heeft geleverd geldt $k = 0,7$ en $z = 1,3$.

3p **13** Bereken met hoeveel procent de totale spanning van de batterij in dit geval is gedaald. Geef je antwoord in twee decimalen.

3p **14** Bereken, zonder gebruik te maken van een getallenvoorbeeld, met hoeveel volt de spanning van de pluspool afneemt als k halveert. Geef je antwoord in vier decimalen.

noot 1 molair is een maat voor het aantal deeltjes per liter

Uit $V_{batterij} = V_{plus} - V_{min}$ en de gegeven formules voor V_{plus} en V_{min} kan de volgende formule worden herleid:

$$V_{batterij} = 1{,}10 + 0{,}0296 \cdot \log\left(\frac{k}{z}\right)$$

3p **15** Voer deze herleiding uit.

Het is mogelijk om voor $V_{batterij}$ een formule op te stellen waarin alleen z voorkomt:

$$V_{batterij} = 1{,}10 + 0{,}0296 \cdot \log(2z^{-1} - 1)\text{, met } 1 \leq z < 2$$

Doordat z, de concentratie van het zink, toeneemt tijdens het gebruik van de batterij, daalt de totale spanning van de batterij. Dit kan worden aangetoond door te kijken naar de afgeleide functie van $V_{batterij}$. Er geldt (na afronding):

$$\frac{\mathrm{d}V_{batterij}}{\mathrm{d}z} = \frac{-0{,}0257}{2z - z^2}$$

4p **16** Toon aan dat deze formule voor $\frac{\mathrm{d}V_{batterij}}{\mathrm{d}z}$ juist is.

4p **17** Onderzoek met een schets van $\frac{\mathrm{d}V_{batterij}}{\mathrm{d}z}$ of de daling van de totale spanning tijdens het gebruik van de batterij toenemend of afnemend is.

Raad het getal

Raad het getal is een spel voor twee personen waarbij iemand één geheel getal bedenkt, dat de ander vervolgens gaat raden. Diegene die het getal bedenkt, noemen we de **bedenker** en diegene die gaat raden de **speler**.

Het spel werkt als volgt:
De bedenker kiest een getal van maximaal vier cijfers, waarbij het eerste cijfer geen 0 mag zijn. Het getal kan dus bijvoorbeeld 7 zijn, of 60, of 544, of 9328.

Vaak kiest de bedenker een viercijferig getal dat **makkelijk te onthouden** is. Dat is een getal dat
- bestaat uit vier dezelfde cijfers, of
- bestaat uit vier opeenvolgende cijfers, die in oplopende of aflopende volgorde staan (bijvoorbeeld 2345 of 4321).

4p **18** Bereken hoeveel verschillende makkelijk te onthouden getallen er zijn.

Het getal dat de bedenker bedenkt, noemen we het **bedachte getal**. De getallen die de speler noemt, noemen we **genoemde getallen**.
Omdat het lang kan duren voordat de speler het bedachte getal noemt, geeft de bedenker feedback. Deze feedback bestaat uit een van de volgende drie mogelijkheden:
- ‘Goed geraden’ (bedachte getal = genoemde getal).
- ‘Hoger’ (bedachte getal > genoemde getal).
- ‘Lager’ (bedachte getal < genoemde getal).

Het noemen van een getal en het geven van feedback herhaalt zich totdat de bedenker de feedback ‘Goed geraden’ geeft en het spel stopt. Het aantal keer dat de speler een getal noemt en vervolgens feedback krijgt, noemen we het aantal **beurten**.

We bekijken eerst een vereenvoudigde versie van het spel, waarbij de speler aan het begin van het spel weet dat het bedachte getal minimaal 1 is en maximaal 9. De speler kan in elke beurt het aantal nog mogelijke getallen in ieder geval halveren door de volgende strategie toe te passen:
- Is het aantal nog mogelijke getallen oneven, noem dan het middelste nog mogelijke getal.
- Is het aantal mogelijke getallen even, noem dan een van de twee middelste nog mogelijke getallen.

De bedenker kiest het getal 8. De speler volgt bovenstaande strategie. Het aantal beurten waarin de speler het bedachte getal raadt, ligt dan nog niet vast.

4p **19** Onderzoek welke aantallen beurten mogelijk zijn waarin de speler het bedachte getal 8 kan raden.

In het vervolg van deze opgave bekijken we een versie van het spel, waarbij we de eis dat het bedachte getal uit maximaal vier cijfers moet bestaan, loslaten. We kijken naar getallen tussen 0 en n, waarbij n een geheel getal groter dan 1 is. Hierdoor kan het bedachte getal elk getal vanaf 1 tot en met $n-1$ zijn.

Het aantal beurten dat nodig is om het bedachte getal te raden, hangt mede af van de gevolgde strategie. Als de eerder beschreven strategie toegepast wordt, dan geldt:

$$n-1 < 2^{m-1}$$

Hierbij is m het maximaal aantal beurten dat nodig is om het bedachte getal te noemen.

Twee personen spelen het spel met $n = 26$. Volgens de formule is de kleinst mogelijke waarde van m dan gelijk aan 6.

2p **20** Toon dit met behulp van de formule $n-1 < 2^{m-1}$ aan.

De waarde 6 die de formule geeft voor $n = 26$ gaat uit van het ‘slechtste’ geval: dat steeds precies de helft van het aantal mogelijke getallen overblijft. Het blijkt echter dat voor $n = 26$ de speler het bedachte getal altijd in maximaal 5 beurten kan noemen.

4p **21** Bepaal het maximaal aantal overblijvende getallen per beurt en laat daarmee zien dat de speler in maximaal 5 beurten het bedachte getal kan noemen voor $n = 26$.

Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

Recordpoging triatlon

Een triatlon is een sport waarbij zwemmen, fietsen en hardlopen gecombineerd worden. In het najaar van 2022 kreeg de triatleet Adrian Kostera bekendheid met zijn voornemen om met het uitvoeren van een extreem lange triatlon in het boek Guiness World Records (GWR) te komen.

Adrian Kostera wilde voor zijn recordpoging een triatlon afleggen met een totale afstand van 40 170 km (zwemmen, fietsen en hardlopen samen). Dit is ongeveer gelijk aan de omtrek van de aarde.

Het GWR heeft bepaald hoe Kostera de 40 170 km moest verdelen over de drie verschillende onderdelen: hij moest 3% van de totale afstand zwemmen, 77,5% fietsen en 19,5% hardlopen.

Kostera legde vanaf 1 juni 2023 tot en met 31 mei 2024 (366 dagen) elke dag een stukje van deze triatlon af, waarbij het zijn streven was om **elke dag evenveel tijd** aan deze extreem lange triatlon te besteden. Van het GWR moest hij eerst de gehele zwemafstand afleggen, daarna de gehele fietsafstand en als laatste de gehele loopafstand.

Kostera ging dus:
- a dagen x km per dag zwemmen
- b dagen y km per dag fietsen
- c dagen z km per dag hardlopen

Om te weten hoe lang hij over elk onderdeel zou doen, heeft hij vooraf een schatting gemaakt van zijn gemiddelde tempo per onderdeel. Zie de tabel.

tabel

onderdeel	**geschat gemiddeld tempo**
zwemmen	2 min en 40 seconden per 100 meter
fietsen	25 km/uur
hardlopen	8 min en 45 seconden per km

Op basis hiervan kon vooraf berekend worden hoeveel dagen Kostera tijdens deze recordpoging bezig zou zijn met zwemmen, hoeveel dagen met fietsen en hoeveel dagen met hardlopen.

7p **22** Onderzoek hoeveel gehele dagen Kostera per onderdeel (zwemmen, fietsen en hardlopen) naar verwachting nodig had.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.