Examen VWO

2025

tijdvak 1
woensdag 14 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 18 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Formules

Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$$
$$\sin(t-u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$$
$$\cos(t+u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$$
$$\cos(t-u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

Vierdegraadsfunctie

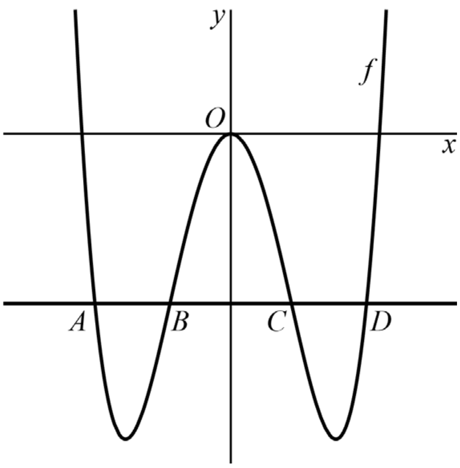
De vierdegraadsfunctie f wordt gegeven door $f(x) = x^4 - 30x^2$.
De grafiek van f heeft twee buigpunten met dezelfde y-coördinaat.

De y-coördinaat van de buigpunten is -125.

4p **1** Bewijs dat de y-coördinaat van de buigpunten -125 is.

De lijn door de buigpunten B en C snijdt de grafiek van f in twee andere punten, A en D. Zie de figuur.

figuur



4p **2** Bereken exact de lengte van AD.

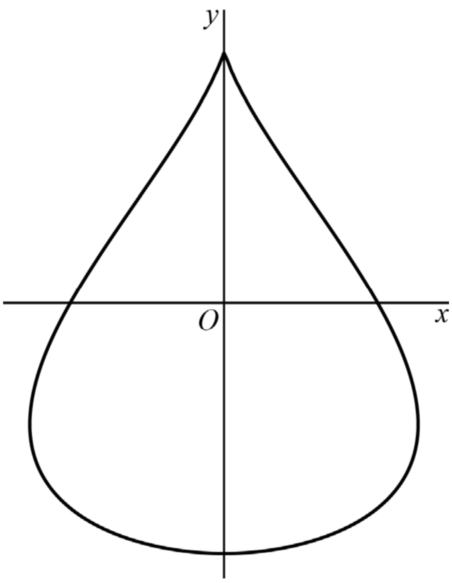
Druppel

De kromme K wordt gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \cdot \left(\cos(t) - 1\right) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \le t \le 2\pi$$

Deze kromme is weergegeven in de figuur.

figuur



In drie punten van deze kromme loopt de raaklijn aan de kromme verticaal.

6p **3** Bereken exact de coördinaten van deze drie punten.

Voor de punten op kromme K geldt:

$$x^2 = -y^4 + 2y^3 - 2y + 1$$

4p **4** Bewijs dit.

Kromme K sluit een vlakdeel in dat symmetrisch is in de y-as. Door dit vlakdeel te wentelen om de y-as ontstaat een omwentelingslichaam in de vorm van een druppel.

4p **5** Bereken exact de inhoud van dit omwentelingslichaam.

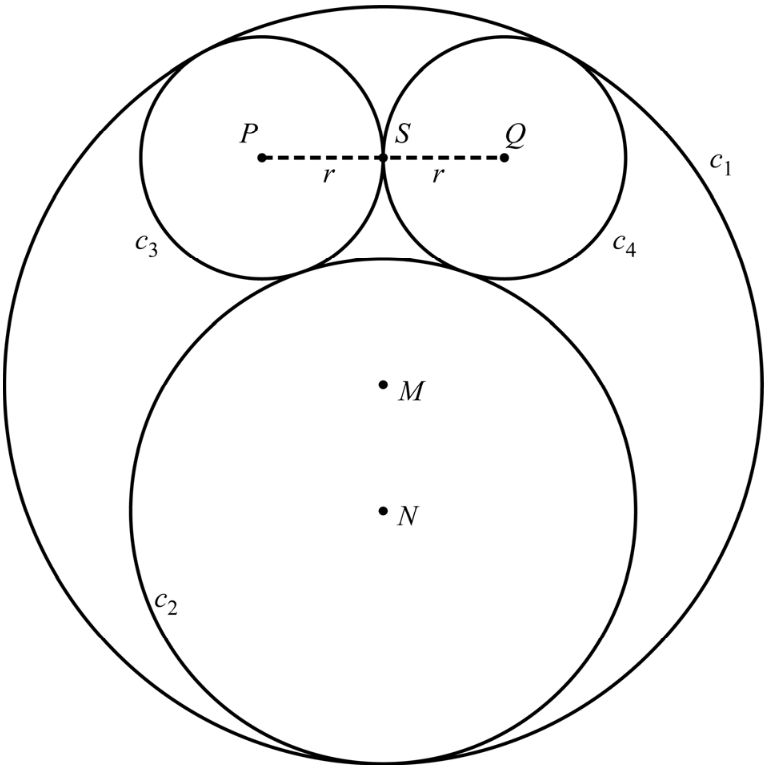
Cirkels in een cirkel

Gegeven is de cirkel c_1 met middelpunt M en straal 3.
Verder zijn gegeven de cirkels c_2, c_3 en c_4, zó dat geldt:

- Cirkels c_2, c_3 en c_4 raken cirkel c_1.
- Cirkel c_2 heeft middelpunt N en straal 2.
- Cirkel c_3 heeft middelpunt P en straal r.
- Cirkel c_4 heeft middelpunt Q en straal r.
- Cirkel c_3 en c_4 raken elkaar in punt S.
- Cirkels c_3 en c_4 raken c_2.

Zie de figuur. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



Er geldt: $MS = \sqrt{9-6r}$

3p **6** Bewijs dit. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

Er geldt verder dat $MN = 1$.

6p **7** Bereken exact de waarde van r. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

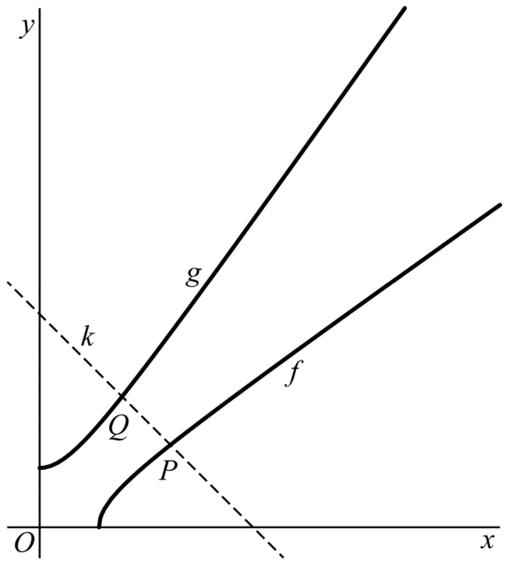
Een wortelfunctie en haar inverse

Voor $x \geq 0$ worden de functies f en g gegeven door $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 1}$ en $g(x) = \sqrt{2x^2 + 2}$. De functies f en g zijn elkaars inverse.

3p **8** Bewijs dat f en g elkaars inverse zijn.

Lijn k met vergelijking $y = -x + a$, met $a \geq \sqrt{2}$, snijdt de grafiek van f in punt P en de grafiek van g in punt Q. Zie figuur 1.

figuur 1



De lengte van lijnstuk PQ is afhankelijk van a.
Er geldt: $PQ = 3a\sqrt{2} - 4\sqrt{a^2 - 1}$

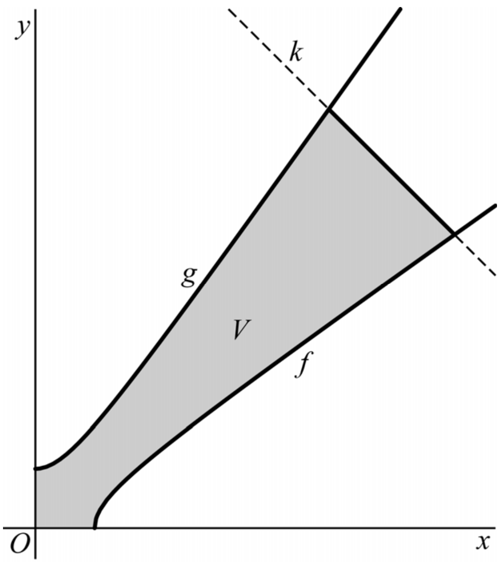
Er is een waarde van a waarvoor de lengte van lijnstuk PQ minimaal is.

5p **9** Bereken exact deze waarde van a.

In figuur 2 zijn opnieuw de grafieken van f , g en k weergegeven, nu voor $a = 17$. Lijn k snijdt de grafiek van f in het punt $(10, 7)$.

Vlakdeel V is het gebied dat begrensd wordt door de grafieken van f en g, de x-as, de y-as en lijn k. In figuur 2 is V grijs gemaakt.

figuur 2



6p **10** Bereken de oppervlakte van V. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

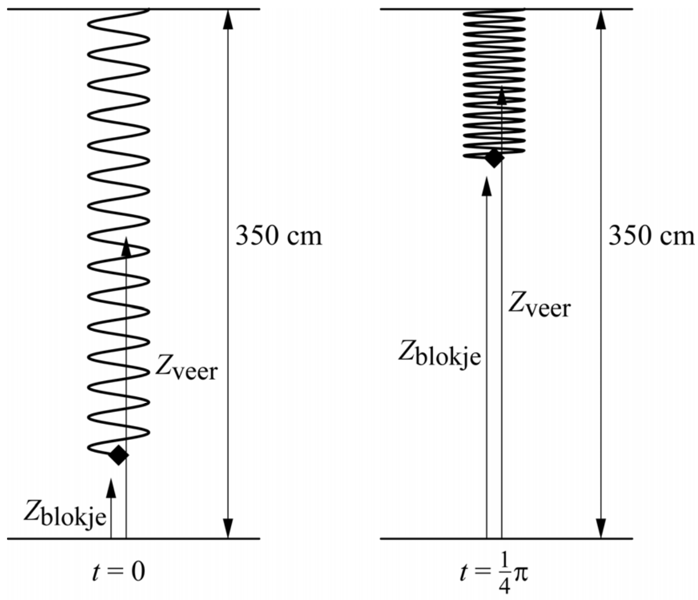
Op en neer

Twee leerlingen doen als volgt een onderzoek voor hun profielwerkstuk:

Een metalen blokje hangt aan een lange veer die is bevestigd aan een plafond op een hoogte van 350 cm. Het blokje wordt recht naar beneden getrokken en op $t = 0$ losgelaten. Het blokje beweegt vervolgens op en neer. Zie figuur 1.

De afmetingen van het blokje en de wrijvingskracht worden verwaarloosd.

figuur 1



Zowel het blokje als de veer heeft een zwaartepunt. In deze opgave bekijken we eerst de zwaartepunten van het blokje en de veer apart.

De hoogte van het **zwaartepunt van het blokje** wordt benaderd door het volgende model: $Z_{\text{blokje}}(t) = 150 - 100\cos(4t)$

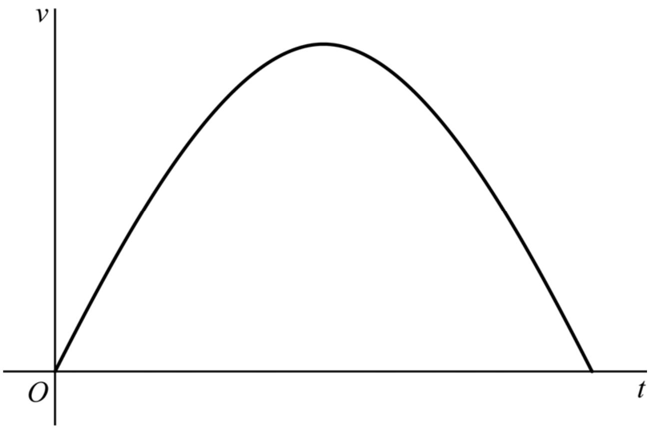
Hierbij is Z_{blokje} de hoogte van het zwaartepunt van het blokje in cm en t de tijd in seconden.

Het **zwaartepunt van de veer** bevindt zich op elk moment in het midden van de veer.

3p **11** Laat met behulp van het gegeven model van het blokje en figuur 1 zien dat voor de hoogte van het zwaartepunt van de veer in cm geldt: de amplitude is 50 en de evenwichtsstand is 250.

Op het moment dat het blokje in het laagste punt wordt losgelaten, is zijn snelheid 0. Daarna neemt de snelheid toe tot de maximale snelheid, om vervolgens weer af te nemen, totdat in het hoogste punt de snelheid weer 0 is. In figuur 2 is de grafiek van de snelheid v tijdens de opgaande beweging weergegeven.

figuur 2



Tijdens de opgaande beweging zijn er twee hoogtes waarop de snelheid van het blokje gelijk is aan 255 cm/seconde.

3p **12** Bereken deze twee hoogtes. Geef je eindantwoord in centimeters nauwkeurig.

De hoogte van het zwaartepunt van de veer wordt benaderd door het volgende model: $Z_{\text{veer}}(t) = 250 - 50\cos(4t)$
Hierbij is Z_{veer} de hoogte van het zwaartepunt van de veer in cm en t de tijd in seconden.

Er kan ook gekeken worden naar het zwaartepunt van het blokje en de veer samen. De massa van de veer is 600 gram en de massa van het blokje is 1000 gram. Z_{totaal} is de hoogte van het zwaartepunt van blokje en veer samen.

3p **13** Stel een formule op van Z_{totaal} in de vorm $Z_{\text{totaal}}(t) = a + b\cos(4t)$. Licht je werkwijze toe.

Een raaklijn met twee cirkels

Gegeven zijn de punten $A(-6, -6)$ en $B(-18, -2)$.

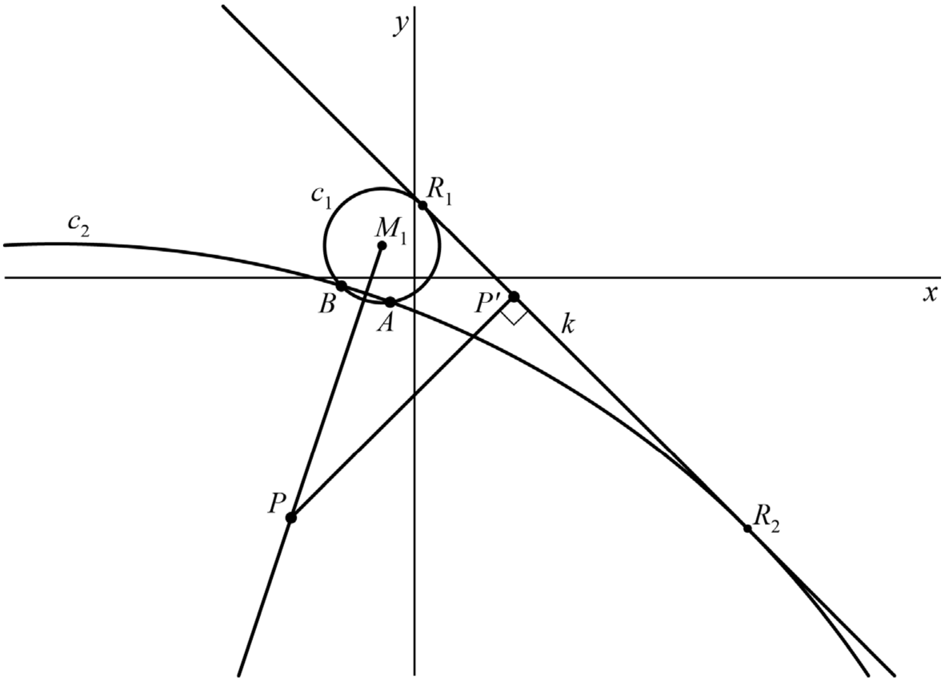
Lijn k is de lijn met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Er bestaan twee cirkels c_1 en c_2 die voldoen aan de volgende eisen:

- Punt A en punt B liggen op de cirkel.
- De cirkel raakt aan lijn k.

Cirkel c_1 heeft middelpunt M_1 en raakt aan lijn k in het punt R_1.
Cirkel c_2 heeft middelpunt M_2 en raakt aan lijn k in het punt R_2.
Zie de figuur. In de figuur is c_2 vanwege de grootte slechts gedeeltelijk weergegeven. Middelpunt M_2 valt buiten de figuur.

figuur



Voor een willekeurig punt P op de middelloodlijn van AB geldt:
$P(p, 3p+32)$
De loodrechte projectie van punt P op lijn k is P'. Zie de figuur.
De coördinaten van P' zijn $(-p-6, p+26)$.

4p **14** Bewijs dat de coördinaten van P' juist zijn.

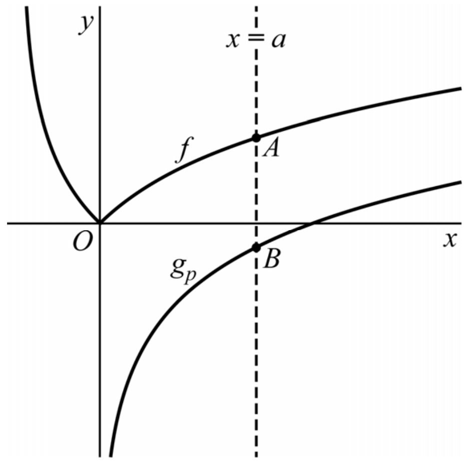
M_1 en M_2 liggen, net als P, op de middelloodlijn van AB. Als P samenvalt met M_1, dan geldt dat PP' gelijk is aan de straal van de bijbehorende cirkel en dus ook gelijk aan PB en PA. Met behulp hiervan kunnen de coördinaten van M_1 en M_2 worden berekend.

5p **15** Bereken exact de coördinaten van M_1 en M_2.

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \left|\ln(x+1)\right|$.
De functie g_p wordt gegeven door $g_p(x) = \ln(px)$ voor $0 < p \le 1$.
De grafiek van g_p ligt geheel onder de grafiek van f.

In figuur 1 is de grafiek van f weergegeven. Ook is voor een waarde van p de grafiek van g_p weergegeven.

figuur 1



De lijn met vergelijking $x = a$ (met $a > 0$) snijdt de grafieken van f en g_p in de punten A en B.

Voor $p = 1$ is er een waarde van a waarvoor geldt: $OB = OA + 2$

4p **16** Bereken deze waarde van a. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

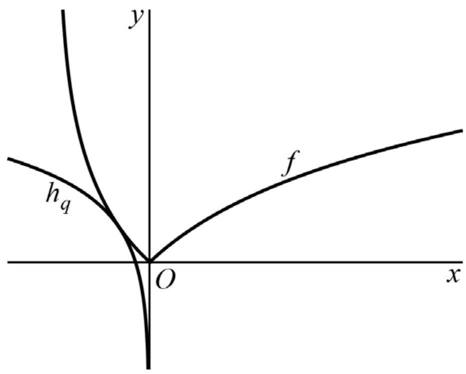
Voor een bepaalde waarde van p geldt:

als a onbegrensd toeneemt, nadert de afstand AB tot 1.

4p **17** Bereken exact deze waarde van p.

De functie h_q wordt gegeven door $h_q(x) = \frac{1}{2}\ln(-x) + q$.
In figuur 2 is voor een bepaalde waarde van q de grafiek van h_q weergegeven. Voor deze waarde van q raakt de grafiek van h_q de grafiek van f links van de y-as.

figuur 2



6p **18** Bereken algebraïsch deze waarde van q. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Bronvermelding
Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.