**Examen VWO**

# 2024

tijdvak 2
maandag 24 juni
13.30 - 16.30 uur

## wiskunde B

Dit examen bestaat uit 17 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 75 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

# Formules

## Goniometrie

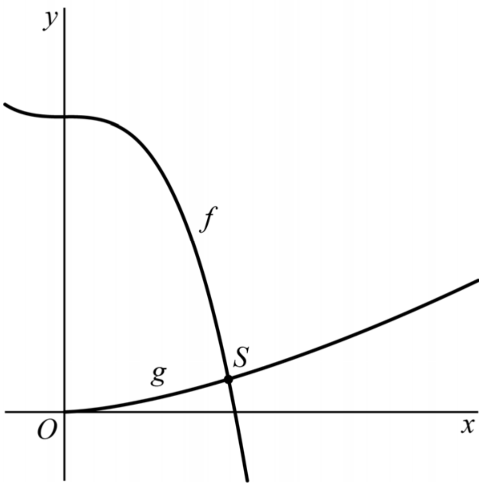
$$\sin(t+u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\sin(u)$$
$$\sin(t-u)=\sin(t)\cos(u)-\cos(t)\sin(u)$$
$$\cos(t+u)=\cos(t)\cos(u)-\sin(t)\sin(u)$$
$$\cos(t-u)=\cos(t)\cos(u)+\sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t)=\cos^2(t)-\sin^2(t)=2\cos^2(t)-1=1-2\sin^2(t)$$

## Twee functies

De functies $f$ en $g$ worden gegeven door $f(x) = 72 - x^3$ en $g(x) = x\sqrt{x}$.
Het snijpunt van de grafieken van $f$ en $g$ is het punt $S$. Zie figuur 1.

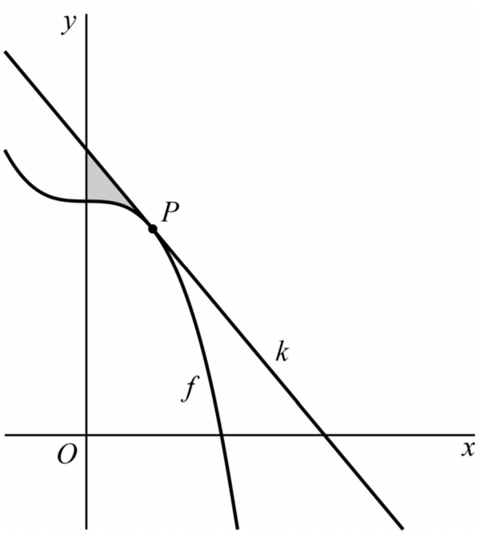
**figuur 1**




4p **1** Bereken exact de coördinaten van $S$.

De lijn $k$ heeft vergelijking $y = -12x + 88$.
Lijn $k$ raakt aan de grafiek van $f$ in het punt $P$ rechts van de $y$-as.
Het vlakdeel $V$ wordt ingesloten door de grafiek van $f$, lijn $k$ en de $y$-as.
In figuur 2 is dit vlakdeel grijs weergegeven.

**figuur 2**




5p **2** Bereken exact de oppervlakte van $V$.

## Cobb-Douglas-productiefunctie

De Cobb-Douglas-productiefunctie is een wiskundig model dat economen gebruiken om de productie $Y$ te voorspellen. In dit model hangt de productie af van twee factoren: **arbeid** en **kapitaal**.
Met arbeid $L$ wordt het aantal voltijdbanen van werknemers bedoeld.
Met kapitaal $K$ wordt in deze opgave het aantal machines bedoeld dat beschikbaar is voor de productie.

De formule bij dit model luidt:

$$Y = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$$

Hierbij zijn $A$, $\alpha$ en $\beta$ constanten die afhangen van het soort bedrijf.

Iemand wil € 1 000 000 per jaar investeren in een nieuw bedrijf.

Voor een bedrijf in deze sector geldt $A = 40$, $\alpha = 0{,}7$ en $\beta = 0{,}3$.
De kosten per voltijdbaan per jaar bedragen € 50 000 en de kosten per machine per jaar bedragen € 20 000.
Er geldt dus: $50\,000L + 20\,000K = 1\,000\,000$
Uit deze gegevens is af te leiden dat: $Y = 40 \cdot L^{0{,}7} \cdot (50 - 2{,}5L)^{0{,}3}$

2p **3** Toon aan dat $Y = 40 \cdot L^{0{,}7} \cdot (50 - 2{,}5L)^{0{,}3}$.

De investeerder wil het volledige bedrag van € 1 000 000 investeren in arbeid en kapitaal, en wel in zo'n verhouding dat de productie $Y$ maximaal is.

5p **4** Bereken algebraïsch hoeveel voltijdbanen de investeerder moet inzetten om de productie $Y$ maximaal te krijgen.

Als $\beta = 1 - \alpha$ dan spreken economen van een constant schaalvoordeel.
Dat wil zeggen dat de inzet van arbeid en kapitaal evenredig is met de productie. Ofwel: als zowel $L$ als $K$ met dezelfde factor $g$ groeit, dan groeit ook de productie $Y = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$ met diezelfde factor $g$.

4p **5** Bewijs dat bij $\beta = 1 - \alpha$ geldt: als zowel $L$ als $K$ met dezelfde factor $g$ groeit, dan groeit ook de productie $Y$ met diezelfde factor $g$.

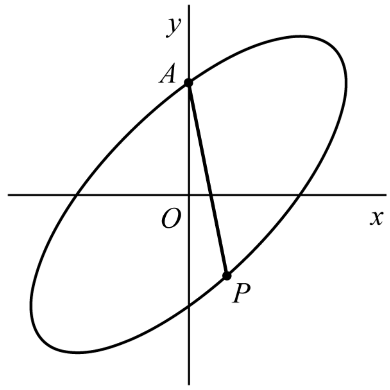
## Loodrecht op de snelheidsvector

De beweging van een punt $P$ wordt gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \cos(t - \frac{1}{4}\pi) \end{cases} \quad \text{met } 0 \le t \le 2\pi$$

In figuur 1 is de baan van $P$ weergegeven.

**figuur 1**

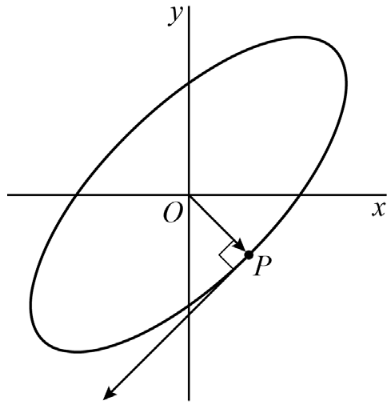



Punt $A(0, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ is het snijpunt van de baan van $P$ met de positieve $y$-as. Er is een positie van punt $P$ waarvoor de afstand tussen de punten $A$ en $P$ maximaal is.

3p **6** Bereken deze maximale afstand. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

In figuur 2 is een situatie weergegeven waarbij de vector $\overrightarrow{OP}$ loodrecht staat op de snelheidsvector in punt $P$.
Hieruit volgt: $\sin\left(2t\right) = \sin\left(2t - \frac{1}{2}\pi\right)$

**figuur 2**




4p **7** Bewijs dat uit het feit dat de vector $\overrightarrow{OP}$ loodrecht staat op de snelheidsvector in punt $P$ inderdaad volgt: $\sin\left(2t\right) = \sin\left(2t - \frac{1}{2}\pi\right)$

Er zijn vier posities van $P$ waarbij een situatie zoals in figuur 2 voorkomt.

3p **8** Bereken exact de vier waarden van $t$ die horen bij deze posities.

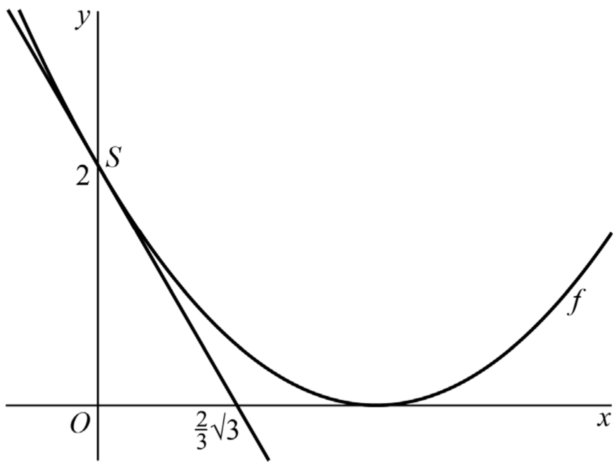
## Passende parabool

De kwadratische functie $f$ wordt gegeven door $f(x) = ax^2 + bx + c$.
De grafiek van $f$ snijdt de $y$-as in het punt $S(0, 2)$.

De raaklijn aan de grafiek van $f$ in punt $S$ snijdt de $x$-as in het punt $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0\right)$.

Verder is gegeven dat de grafiek van $f$ een dalparabool is die de positieve $x$-as raakt.
Zie de figuur.

**figuur**

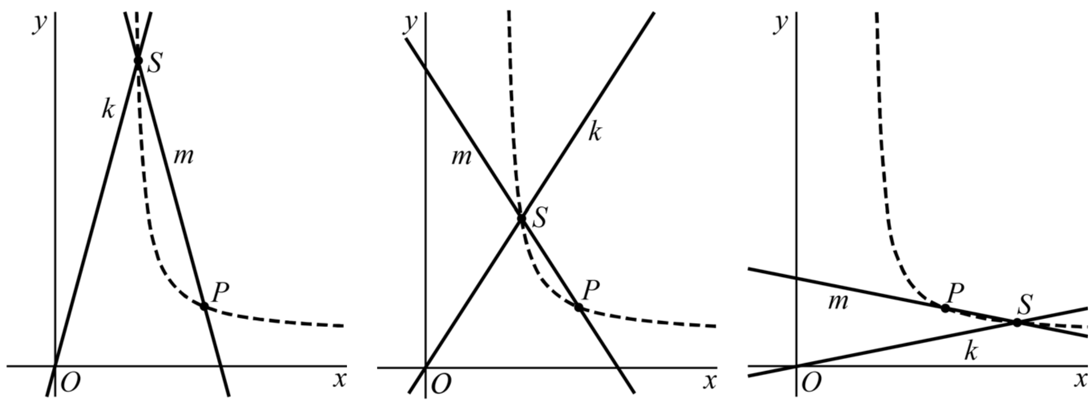



6p **9** Bereken exact de waarden van $a$, $b$ en $c$.

## Lijnenparen

De lijn $k$ heeft vergelijking $y = ax$ met $a > 0$.
De lijn $m$ heeft richtingscoëfficiënt $-a$ en gaat door het punt $P(10, 4)$.
Het punt $S$ is het snijpunt van de lijnen $k$ en $m$. Punt $S$ ligt op de grafiek van de functie $f$ die wordt gegeven door $y = \dfrac{2x}{x-5}$ waarbij geldt: $x > 5$
In figuur 1 is voor drie waarden van $a$ de situatie weergegeven. De grafiek van $f$ is gestippeld weergegeven.

**figuur 1**




$a = 3{,}7$ $\quad$ $a = 1{,}55$ $\quad$ $a = 0{,}2$

4p **10** Bewijs dat voor elke positieve waarde van $a$ punt $S$ op de grafiek van $f$ ligt.

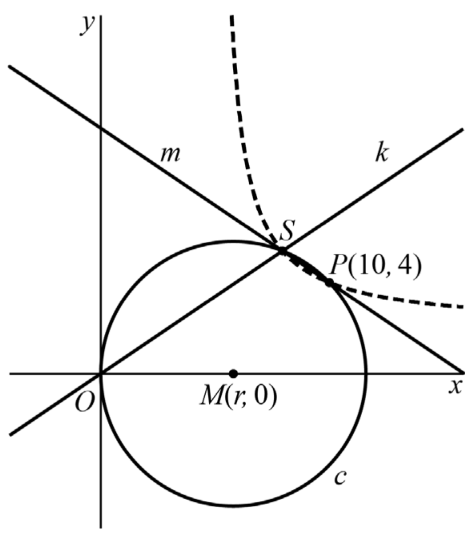
3p **11** Bewijs dat de grafiek van $f$ voor elke waarde van $x > 5$ daalt.

Het is voor iedere waarde van $a$ mogelijk om een cirkel $c$ door de punten $O$, $S$ en $P$ te tekenen. Hierbij wordt de situatie dat $S$ en $P$ samenvallen buiten beschouwing gelaten.

De coördinaten van $S$ zijn $\left(x, \dfrac{2x}{x-5}\right)$.

Er is één waarde van $a$ waarvoor deze cirkel raakt aan de $y$-as. Het middelpunt $M(r, 0)$ van deze cirkel ligt op de $x$-as.
Deze situatie is in figuur 2 weergegeven.

**figuur 2**




6p **12** Bereken de waarde van $a$ waarvoor de cirkel raakt aan de $y$-as. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

## Absolute logaritme

De functie $f_{18}$ wordt gegeven door $f_{18}(x) = \left| {}^{2}\log(x^2 - 18x + 69) \right|$.

De grafiek van $f_{18}$ snijdt de lijn met vergelijking $y = 2$ in vier punten.

4p **13** Bereken exact de $x$-coördinaten van deze vier punten.

De functie $f_a$ wordt gegeven door $f_a(x) = \left| {}^{2}\log(x^2 - ax + 69) \right|$ met $a > 0$.
Voor een bepaalde waarde van $a$ heeft de grafiek van $f_a$ twee verticale asymptoten met een onderlinge afstand van 20.

4p **14** Bereken exact deze waarde van $a$.

## Lijnstukken bij een exponentiële functie

De functie $f_a$ wordt gegeven door

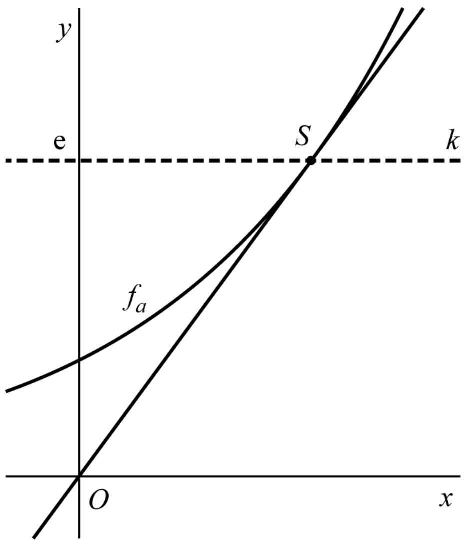
$f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$ met $a > 0$.

De lijn $k$ met vergelijking $y = \mathrm{e}$ snijdt de grafiek van $f_a$ in $S$.

In figuur 1 zijn voor een waarde van $a$ de grafiek van $f_a$ en lijn $k$ weergegeven.

Ook is de raaklijn aan de grafiek van $f_a$ door $S$ weergegeven.

**figuur 1**




5p **15** Bewijs dat deze raaklijn voor elke waarde van $a$ door de oorsprong gaat.

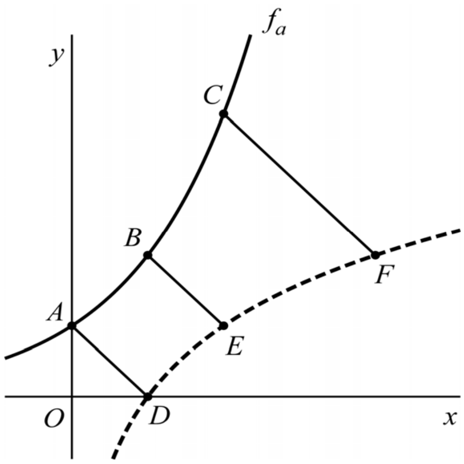
In figuur 2 is opnieuw voor een waarde van $a$ de grafiek van $f_a$ weergegeven.

Op deze grafiek liggen de punten $A(0,1)$, $B(1, \mathrm{e}^{a})$ en $C(2, \mathrm{e}^{2a})$.

Ook is de grafiek van de inverse van $f_a$ (gestippeld) weergegeven.

De punten $D$, $E$ en $F$ zijn de beeldpunten van respectievelijk $A$, $B$ en $C$ bij spiegeling in de lijn $y = x$.

**figuur 2**




Er is een waarde van $a$ waarvoor geldt:

$$AD + BE = CF$$

7p **16** Bereken exact deze waarde van $a$.

**Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.**

## Een hoek van 45 graden

Gegeven zijn het punt $P$ met coördinaten $(9, 27)$ en de vector $\overrightarrow{OP}$.

Ook zijn gegeven het punt $Q(a, b)$ en de vector $\overrightarrow{OQ}$.

Voor $\overrightarrow{OQ}$ geldt: $\left|\overrightarrow{OQ}\right| = 5\sqrt{5}$.

Er zijn twee mogelijke posities van $Q$, zodat geldt: $\angle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = 45^\circ$.

6p **17** Bereken algebraïsch de mogelijke coördinaten van beide posities.

**Bronvermelding**

*Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.*