Examen VWO

2022

tijdvak 2
tijdsduur: 3 uur

wiskunde B

Dit examen bestaat uit 16 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Formules

Goniometrie

$$\sin(t+u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\sin(u)$$
$$\sin(t-u)=\sin(t)\cos(u)-\cos(t)\sin(u)$$
$$\cos(t+u)=\cos(t)\cos(u)-\sin(t)\sin(u)$$
$$\cos(t-u)=\cos(t)\cos(u)+\sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t)=\cos^2(t)-\sin^2(t)=2\cos^2(t)-1=1-2\sin^2(t)$$

Buigraaklijn

De functie f is gegeven door $f(x) = 2(2x-1)^3 + 3(2x-1)^2$.

Voor de afgeleide geldt: $f'(x) = 48x^2 - 24x$

4p **1** Bewijs dit.

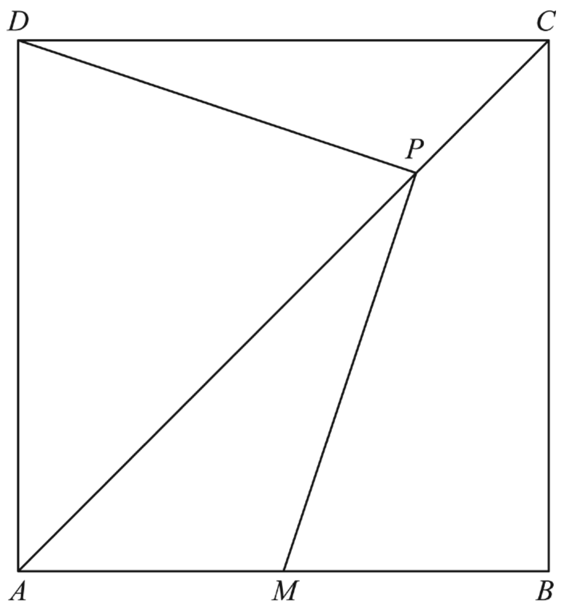
De lijn k raakt de grafiek van f in het buigpunt.

5p **2** Stel door middel van exacte berekeningen een vergelijking op van k.

Op de diagonaal van een vierkant

Gegeven is een vierkant $ABCD$ met zijde 2. Punt M is het midden van lijnstuk AB. Punt P ligt op diagonaal AC en valt niet samen met punt A of punt C. Zie de figuur.

figuur



P kan zo worden gekozen dat de lijnstukken DP en MP loodrecht op elkaar staan.

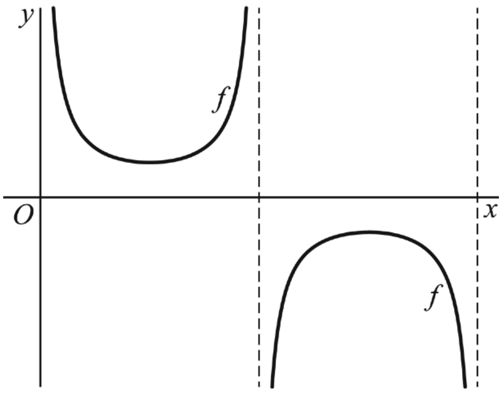
6p **3** Bereken exact de lengte van lijnstuk AP in deze situatie.

Golvend ertussendoor

Voor $0 < x < 2\pi$ is de functie f gegeven door $f(x) = \dfrac{1}{2\sin(x)}$.

In figuur 1 is de grafiek van f weergegeven.

figuur 1

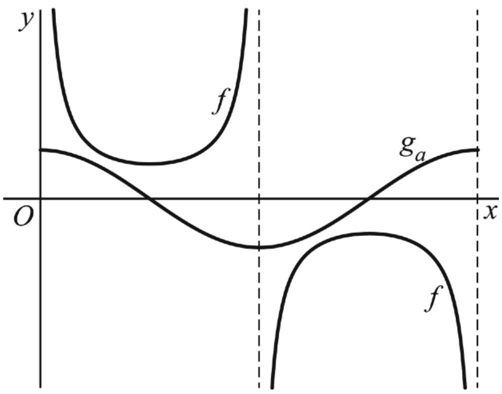


5p **4** Bereken exact het bereik van f.

Voor elke waarde van a is de functie g_a gegeven door $g_a(x) = a\cos(x)$ met domein $[0, 2\pi]$.

In figuur 2 zijn voor een waarde van a de grafieken van f en g_a weergegeven. In deze situatie hebben de grafieken van f en g_a geen punten gemeenschappelijk. Als de waarde van a verandert, verandert de amplitude van de grafiek van g_a.

figuur 2

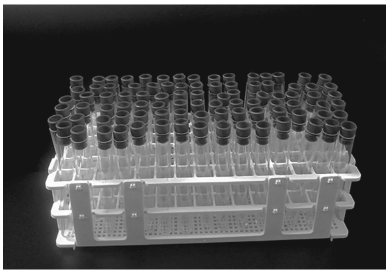


5p **5** Bereken exact voor welke waarden van a de grafieken van f en g_a géén punten gemeenschappelijk hebben.

Efficiënt testen

Een teek is een parasiet. Teken kunnen drager zijn van de bacterie waarvan je de ziekte van Lyme kunt krijgen. Ongeveer 20% van de teken in Nederland is drager van deze bacterie.
Om te onderzoeken of een persoon de ziekte van Lyme heeft, neemt men een monster: er wordt wat bloed afgenomen.
In een laboratorium wil men 1000 monsters testen op de aanwezigheid van de bacterie.

foto



In het laboratorium kan elk van de monsters individueel getest worden. In dat geval zijn er 1000 tests nodig.
Een alternatief is om van een aantal monsters een paar druppels te nemen, die bij elkaar te voegen en dan dit mengsel te testen. Als het mengsel de bacterie niet bevat, dan bevat geen van de monsters in het mengsel de bacterie. Als het mengsel de bacterie wel bevat, weet je nog niet welk monster de bacterie bevat en moeten alsnog de monsters in het mengsel stuk voor stuk worden getest.

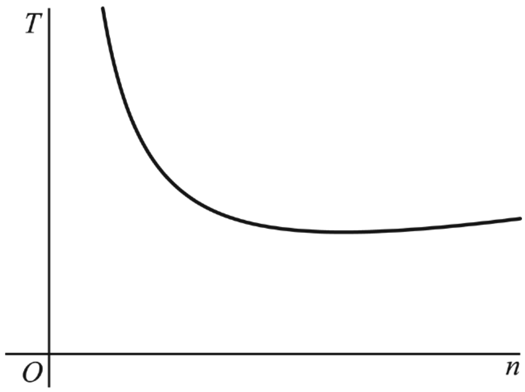
Het aantal monsters dat wordt samengevoegd voor één test is n. Als $n=2$ worden dus telkens twee monsters samengevoegd voor een test, en als het mengsel de bacterie bevat, worden de twee monsters nog eens apart getest. Het totale aantal tests T dat naar verwachting nodig is, hangt af van n volgens de volgende formule:

$$T = 1000 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} - 0{,}8^n\right) \qquad \text{(formule 1)}$$

Hierbij is $n \geq 2$.

We bekijken nu eerst de grafiek van deze formule voor T. Deze grafiek is weergegeven in de figuur hiernaast. De grafiek heeft een laagste punt.

figuur



4p **6** Bepaal met behulp van de afgeleide van T de helling van de grafiek voor $n=4$ en beredeneer daarmee of het laagste punt links of rechts van $n=4$ ligt.

Deze methode om het laagste totale aantal tests te bepalen wordt ook gebruikt bij het testen op andere soorten besmetting. De fractie besmette monsters wordt daarbij steeds voorgesteld door de variabele p (met $0 \leq p \leq 1$). Voor de eerder genoemde besmetting door teken geldt dat ongeveer 20% besmet is, dus wordt gerekend met $p = 0,2$.

Als er niet 1000, maar N monsters worden getest, dan ziet formule 1 er voor willekeurige p als volgt uit:

$$T(n) = N \cdot \left(1 + \frac{1}{n} - (1-p)^n\right) \qquad \text{(formule 2)}$$

Hierin is $T(n)$ het verwachte totale aantal tests, n het aantal monsters dat wordt samengevoegd en p de fractie besmette monsters.

In de praktijk werkt men in een laboratorium niet met de formule, maar met een tabel. Als bekend is welke fractie van de teken (p) besmet is, dan kan in zo'n tabel worden afgelezen voor welke waarde van n het verwachte totale aantal tests ($T(n)$) zo laag mogelijk is.
Om die laagste waarde te vinden wordt bepaald bij welke waarde van p geldt: $T(n) = T(n+1)$.
Er geldt dan het volgende verband:

$$n(n+1) \cdot p(1-p)^n = 1 \qquad \text{(formule 3)}$$

4p **7** Bewijs dat dit verband juist is.

Met behulp van formule 3 kunnen de grenswaarden voor p worden bepaald. Voor een aantal waarden van n staan de grenswaarden voor p weergegeven in de tabel hiernaast. In de tabel is bijvoorbeeld te zien dat voor waarden van p tussen 0,0411 en 0,0656 bij een keuze van $n = 5$ het totale aantal tests zo klein mogelijk is.

tabel

p	n
0,0656	4
0,0411	5
0,0283	6
0,0207	7
0,0158	8

Van een bepaalde besmetting is bekend dat $p = 0,025$. Men wil dat het verwachte totale aantal tests niet groter is dan 750. Met behulp van de tabel en formule 2 kan nu worden berekend van maximaal hoeveel monsters N bepaald kan worden of ze besmet zijn of niet.

3p **8** Bereken met behulp van de tabel en formule 2 van maximaal hoeveel monsters N bepaald kan worden of ze besmet zijn of niet.

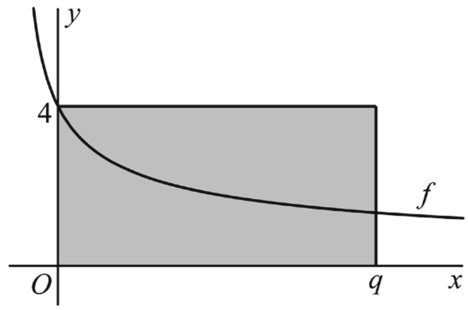
Begrensde gebieden

De functie f is gegeven door:

$$f(x)=\frac{4}{\sqrt{x+1}}$$

De grafiek van f snijdt de y-as in het punt $(0,4)$. In figuur 1 is de grafiek van f weergegeven. Ook is de rechthoek weergegeven die wordt begrensd door de x-as, de y-as, de lijn met vergelijking $y=4$ en de lijn met vergelijking $x=q$ met $q>0$.
De grafiek van f verdeelt deze rechthoek in twee delen.

figuur 1



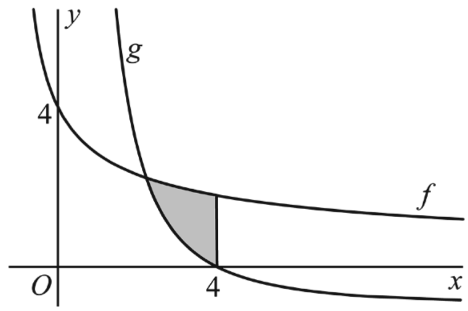
Er is één waarde van q waarbij de oppervlaktes van deze twee delen even groot zijn.

7p **9** Bereken exact deze waarde van q.

De functie g is de inverse functie van de functie f. Het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de grafiek van g en de lijn met vergelijking $x=4$ is in figuur 2 grijs gekleurd.

5p **10** Bereken de oppervlakte van dit gebied.
Geef je eindantwoord in één decimaal.

figuur 2

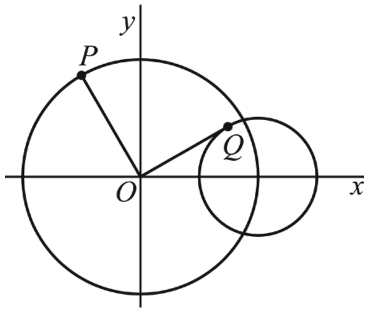


Cirkels en lijnen

Voor $0 \le t \le 2\pi$ beweegt een punt P over een cirkelvormige baan c_P met middelpunt $O(0, 0)$ volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x_P(t) = 2\cos(t) \\ y_P(t) = 2\sin(t) \end{cases}$$

figuur 1



Voor $0 \le t \le 2\pi$ beweegt tegelijkertijd een punt Q over een cirkelvormige baan c_Q volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x_Q(t) = 2 + \cos(t) \\ y_Q(t) = \sin(t) \end{cases}$$

Hoek POQ is afhankelijk van t. In figuur 1 zijn beide cirkels c_P en c_Q weergegeven. Ook zijn de lijnstukken OP en OQ weergegeven voor een waarde van t waarvoor OP en OQ loodrecht op elkaar staan.

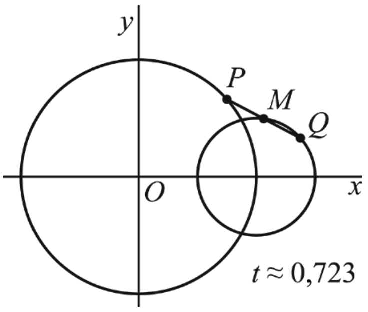
5p **11** Bereken exact de waarden van t waarvoor OP en OQ loodrecht op elkaar staan.

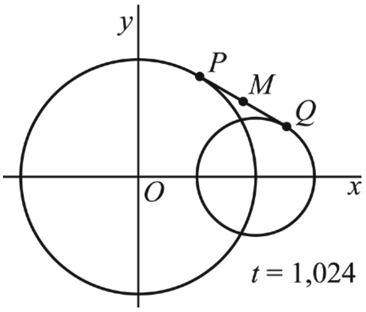
De lijn door P en Q snijdt de x-as in punt A. De x-coördinaat van A is onafhankelijk van t.

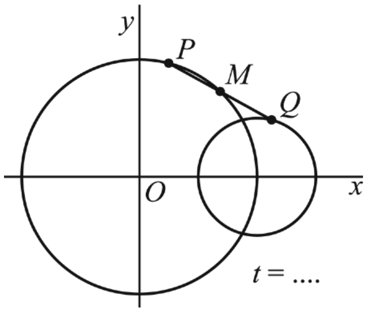
5p **12** Bewijs dit.

Punt M is het midden van lijnstuk PQ. Op $t = 0$ beginnen P en Q vanaf de x-as naar boven te bewegen. Punt M beweegt dan mee naar boven. In figuur 2, 3 en 4 is voor drie waarden van t de situatie weergegeven.

figuur 2 **figuur 3** **figuur 4**







Voor $t \approx 0{,}723$ ligt punt M op cirkel c_Q. Zie figuur 2.
Na $t \approx 0{,}723$ komt M in het gebied buiten c_Q te liggen. Zie figuur 3.
Op een zeker tijdstip ligt M op cirkel c_P. Zie figuur 4.
Punt M ligt een percentage van de tijd waarin de punten P en Q een volledige baan doorlopen buiten c_P en c_Q.

6p **13** Bereken dit percentage. Geef je eindantwoord als geheel getal.

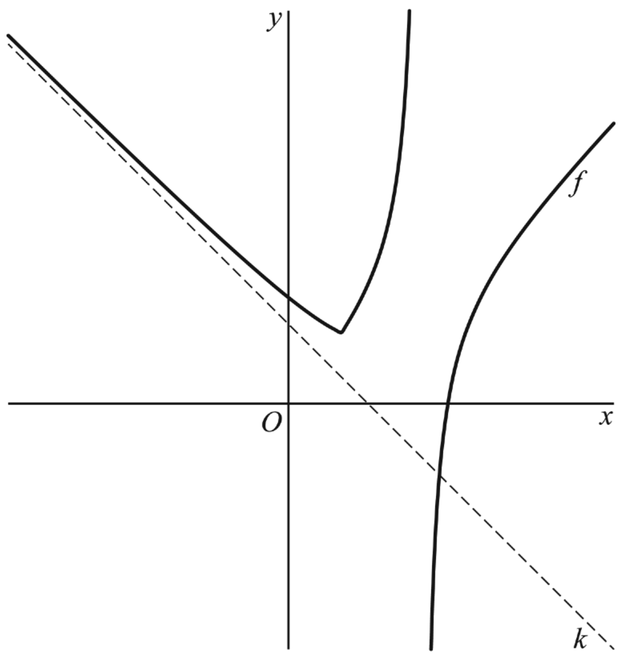
Asymptoot

De functie f is gegeven door:

$$f(x) = |x-1| + \frac{x-5}{2x-5}$$

In de figuur is de grafiek van f weergegeven. De grafiek heeft een knikpunt voor $x = 1$. Lijn k is een scheve asymptoot van de grafiek van f. Ook deze scheve asymptoot is in de figuur weergegeven.

figuur



3p **14** Stel een vergelijking op van k.

Een deel van de grafiek van f ligt onder de x-as.

6p **15** Bereken exact voor welke waarden van x de grafiek van f onder de x-as ligt.

Twee punten op een grafiek

De functie f is gegeven door $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x$.
De punten P en Q liggen op de grafiek van f.
De x-coördinaat van P is p en de x-coördinaat van Q is $2p$.

Voor een bepaalde waarde van p heeft de lijn door P en Q een richtingscoëfficiënt van 6.

5p **16** Bereken exact deze waarde van p.