Examen HAVO

2022

tijdvak 2
tijdsduur: 3 uur

wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 18 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd.
Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Logaritme en parabool

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 3 + {}^{2}\log(x+4)$.
De grafiek van f snijdt de x-as in het punt A.

3p **1** Bereken exact de x-coördinaat van A.

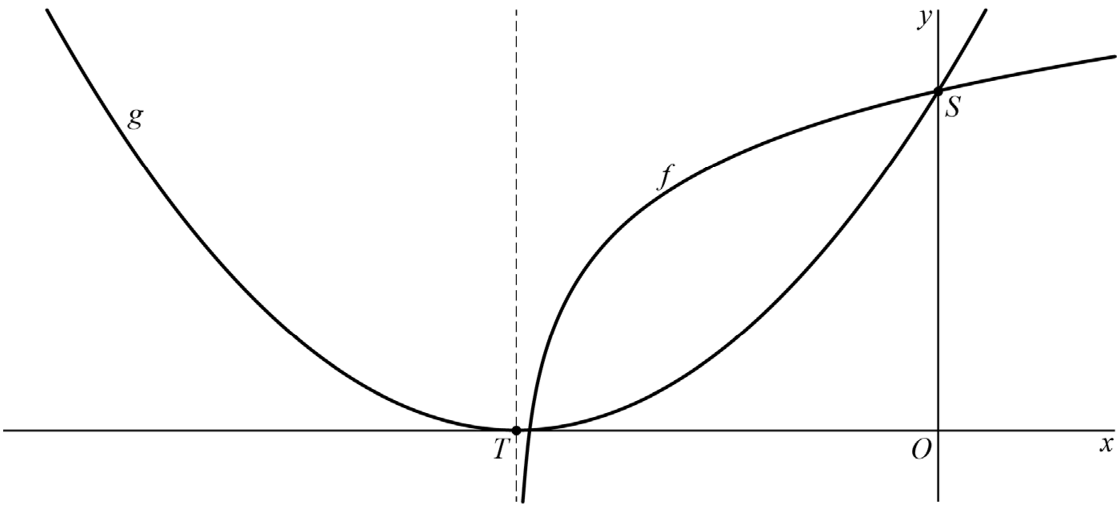
Het functievoorschrift $f(x) = 3 + {}^{2}\log(x+4)$ is te herschrijven in de vorm $f(x) = {}^{2}\log(ax+b)$.

2p **2** Bereken exact de waarden van a en b.

De grafiek van f snijdt de y-as in het punt S.
De grafiek van f heeft een verticale asymptoot. Deze asymptoot snijdt de x-as in het punt T.

De functie g is een kwadratische functie. De grafiek is dus een parabool. Punt T is de top van de parabool. De parabool gaat bovendien door S.
Zie de figuur.

figuur



5p **3** Stel op exacte wijze een functievoorschrift van g op.

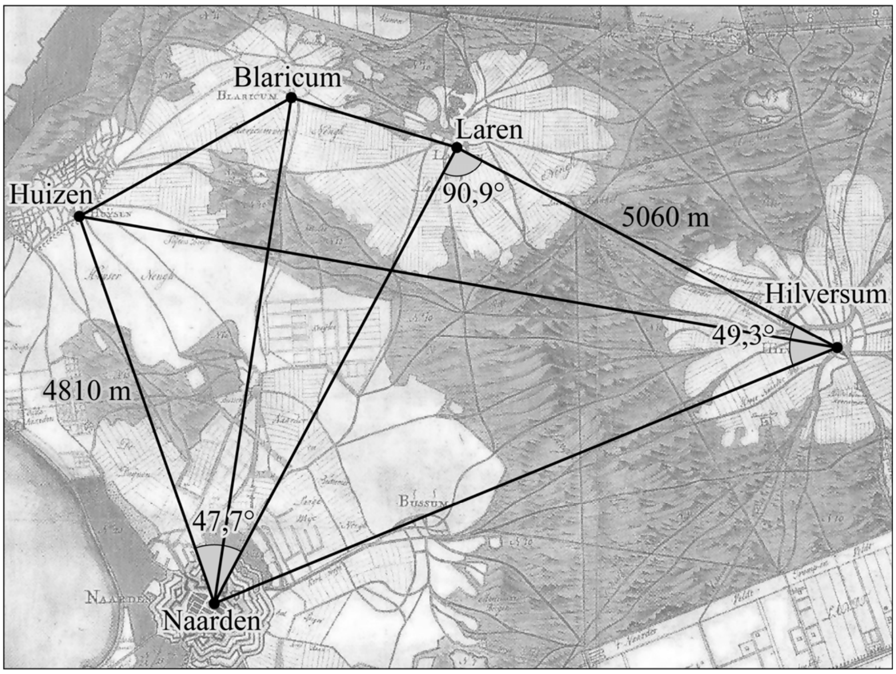
Gooilandkaart

In 1723 heeft landmeter M. Walraven onderstaande kaart van het Gooi gemaakt. De hoekpunten van de driehoeken op de kaart zijn vaak de kerktorens van de dorpen. Met behulp van een hoekmeetinstrument heeft Walraven enkele hoeken zeer nauwkeurig opgemeten. Verder zijn twee hemelsbrede afstanden bepaald. Met het netwerk van driehoeken op de kaart kunnen zo de afstanden tussen de kerktorens berekend worden.

In 1723 zijn de volgende metingen gedaan:
- De afstand tussen (de kerktorens van) Laren en Hilversum is 5060 meter.
- De afstand tussen (de kerktorens van) Naarden en Huizen is 4810 meter.
- De hoek tussen Laren-Hilversum en Laren-Naarden is 90,9°.
- De hoek tussen Hilversum-Laren en Hilversum-Naarden is 49,3°.
- De hoek tussen Naarden-Huizen en Naarden-Laren is 47,7°.

Zie de figuur. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur

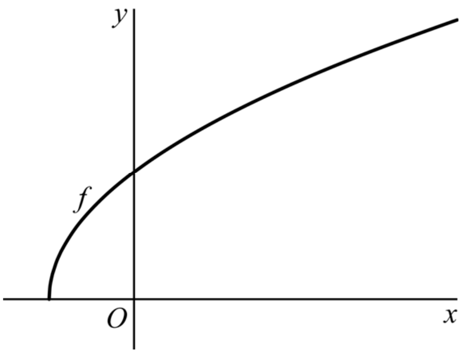


6p **4** Bereken de afstand tussen (de kerktorens van) Huizen en Hilversum. Geef je eindantwoord in tientallen meters nauwkeurig. Je kunt bij het beantwoorden van deze vraag de figuur op de uitwerkbijlage gebruiken.

Wortel en cirkel

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \sqrt{3x+4}$. In figuur 1 is de grafiek van f weergegeven.

figuur 1

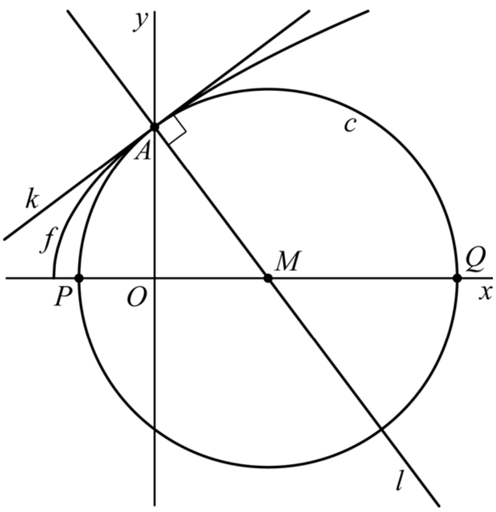


De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $y = \sqrt{x}$ door een horizontale translatie en een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as.

3p **5** Geef aan welke translatie en vermenigvuldiging dit zijn en in welke volgorde ze moeten worden toegepast.

De grafiek van f snijdt de y-as in het punt $A(0, 2)$. De lijn k is de raaklijn aan de grafiek van f in A. De lijn l snijdt lijn k loodrecht in A. Het punt M is het snijpunt van l met de x-as.
De cirkel c heeft punt M als middelpunt en raakt de grafiek van f in punt A. Lijn k is dus ook de raaklijn in A aan c.
De punten P en Q zijn de snijpunten van cirkel c met de x-as. Zie figuur 2.

figuur 2



7p **6** Bereken exact de x-coördinaten van P en Q.

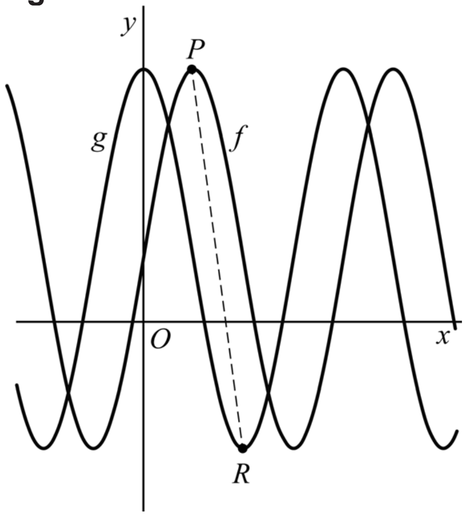
Sinusoïden en somfunctie

De functies f en g worden gegeven door:

$$f(x) = 1 + 3\sin(2x)$$
$$g(x) = 1 + 3\cos(2x)$$

Het punt P is de eerste top van de grafiek van f rechts van de y-as en het punt R is de eerste top van de grafiek van g rechts van de y-as.
Zie figuur 1, waarin ook het lijnstuk PR getekend is.

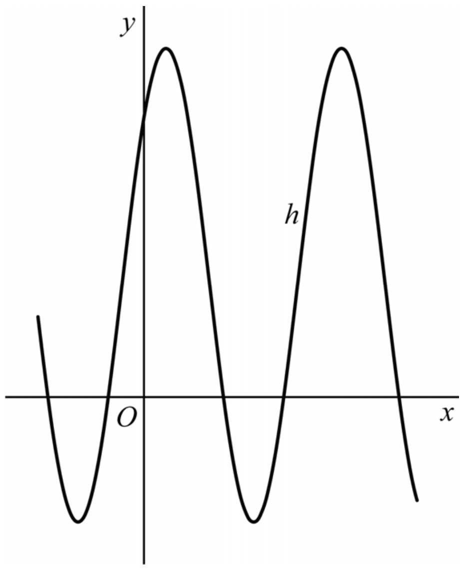
figuur 1



4p **7** Bereken algebraïsch de lengte van lijnstuk PR. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

De grafiek van de somfunctie $h(x) = f(x) + g(x)$ blijkt ook een sinusoïde te zijn. Zie figuur 2.

figuur 2



Het functievoorschrift van h is te schrijven als:

$$h(x) = p + q \cdot \cos(r(x - s))$$

7p **8** Bereken mogelijke waarden van p, q, r en s. Geef je eindantwoorden, indien nodig, in twee decimalen.

Luchtvervuiling

De Air Quality Index (AQI) is een waarde die overheden gebruiken om aan te geven hoe vervuild de lucht is: hoe hoger de AQI, des te sterker is de luchtvervuiling. De AQI wordt berekend uit de ozonconcentratie C in ppm. De ppm is een veelgebruikte eenheid voor concentratie.

Men heeft de mogelijke waarden van de AQI in categorieën opgedeeld. In de tabel is voor elke categorie luchtkwaliteit te zien welke waarden van C en de AQI daarbij horen. Zo is de laagste waarde van de AQI in de categorie 'gemiddeld' gelijk aan 50 en dat is het geval als $C = 0,065$.

tabel

categorie luchtkwaliteit	C (ppm)	AQI
goed	0 – 0,065	0 – 50
gemiddeld	0,065 – 0,085	50 – 100
ongezond voor kinderen en ouderen	0,085 – 0,105	100 – 150
ongezond	0,105 – 0,125	150 – 200
erg ongezond	0,125 – 0,375	200 – 300

Binnen elke afzonderlijke categorie is er een stijgend lineair verband tussen de AQI en C.

Op een bepaalde plek wordt een ozonconcentratie gemeten van 0,20 ppm.

4p **9** Bereken de bijbehorende AQI. Geef je eindantwoord als geheel getal.

In plaats van de concentratie in ppm te geven, kan deze ook in milligram per kubieke meter (mg/m^3) gegeven worden. Als de temperatuur bekend is, kan de concentratie van ppm naar mg/m^3 omgerekend worden. Daarvoor geldt de volgende formule:

$$C_{\text{mg/m}^3} = \frac{584{,}976 \cdot C_{\text{ppm}}}{273{,}15 + T}$$ met T de temperatuur in graden Celsius

Op zeker moment in 2015 werd in Amsterdam een ozonconcentratie van 0,0612 mg/m^3 gemeten. De temperatuur was op dat moment 20 graden Celsius.

4p **10** Bepaal de categorie luchtkwaliteit op dat moment.

Als de temperatuur constant 25 graden blijft, dan is het verband tussen C_{ppm} en $C_{\text{mg/m}^3}$ recht evenredig.

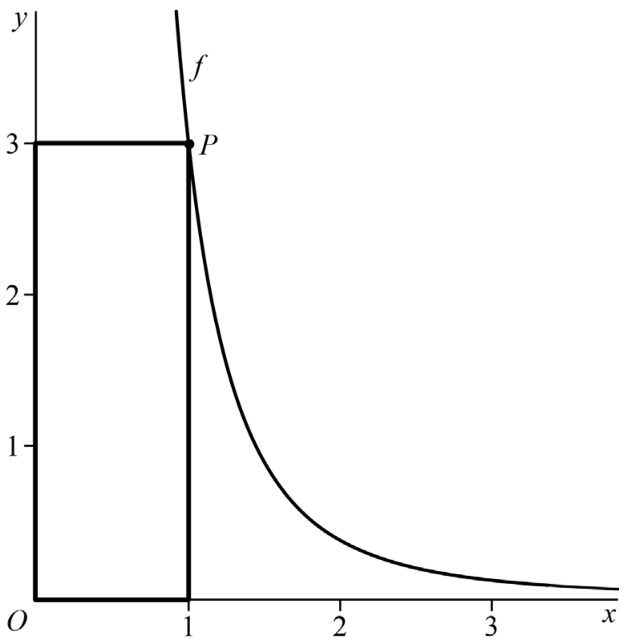
3p **11** Bereken de evenredigheidsconstante als C_{ppm} wordt uitgedrukt in $C_{\text{mg/m}^3}$ bij een temperatuur van 25 graden Celsius. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Minimale omtrek

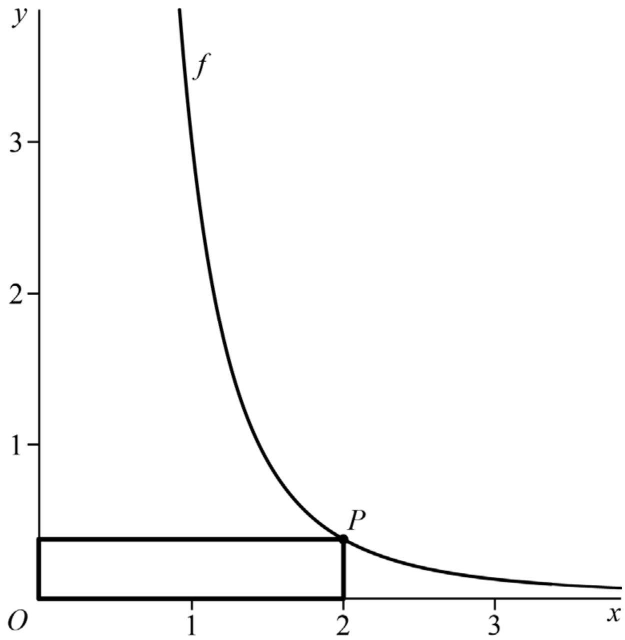
De functie f wordt gegeven door $f(x) = \frac{3}{x^3}$ met $x > 0$.

Punt P is een willekeurig punt op de grafiek van f. Bij zo'n punt P kun je een rechthoek tekenen met horizontale en verticale zijden en hoekpunten P en O. In figuur 1 is de rechthoek getekend als P het punt $(1, 3)$ is en in figuur 2 is de rechthoek getekend als P het punt $\left(2, \frac{3}{8}\right)$ is.

figuur 1



figuur 2



De **omtrek** van de rechthoek in figuur 1 is groter dan de omtrek van de rechthoek in figuur 2. De omtrek is dus afhankelijk van de keuze van P.

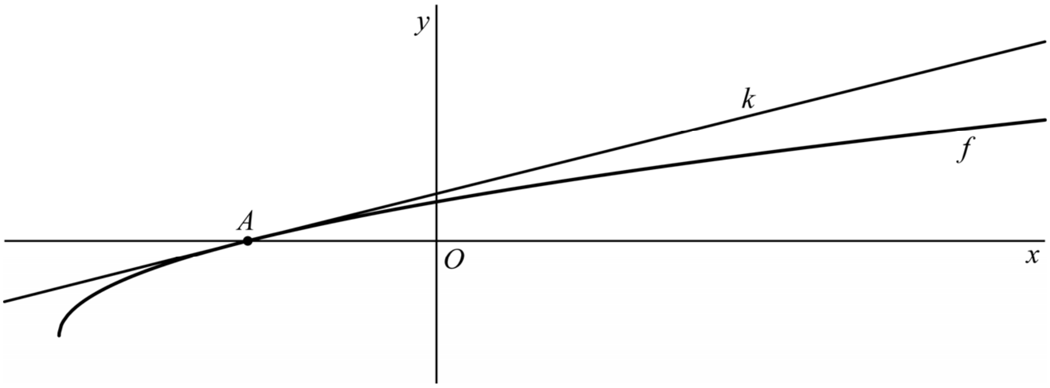
Je kunt P zó op de grafiek van f kiezen, dat de omtrek van de bijbehorende rechthoek minimaal is.

6p **12** Geef een formule voor de omtrek en bereken daarmee exact de coördinaten van het punt P, zó dat de omtrek van de bijbehorende rechthoek minimaal is.

Een raaklijn en een evenwijdige lijn door O

De functie f wordt gegeven door $f(x) = -2 + \sqrt{8 + x}$. Het punt A is het snijpunt van de grafiek van f met de x-as. De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A. Zie figuur 1.

figuur 1

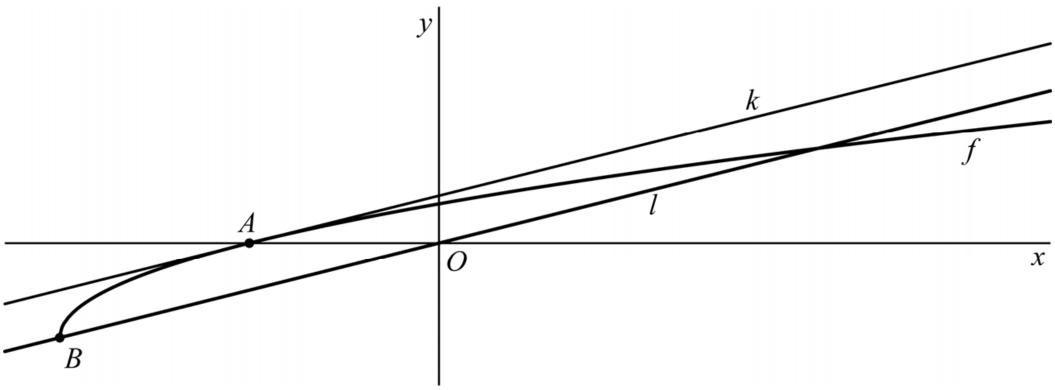


Een vergelijking van k is $y = \frac{1}{4}x + 1$.

5p **13** Bewijs dit.

Het punt B is het randpunt van de grafiek van f. Lijn l is de lijn door B en de oorsprong O. Zie figuur 2.

figuur 2



Lijnen k en l zijn evenwijdig.

3p **14** Bewijs dit.

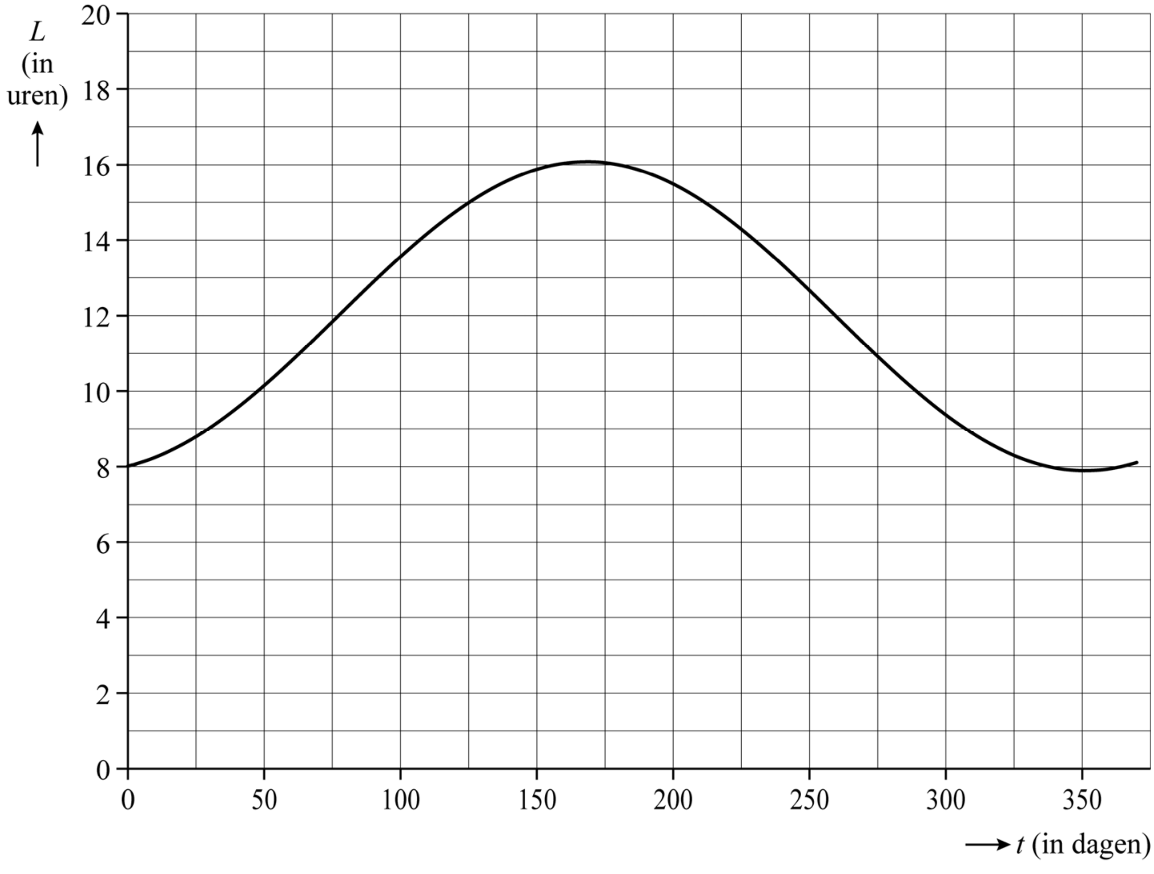
4p **15** Bereken exact de afstand tussen k en l.

Daglengte

De daglengte is het aantal uren tussen zonsopgang en zonsondergang. De daglengte verandert in de loop van het jaar en varieert ook per plaats op aarde.
Gedurende een jaar is voor elke dag in Luxemburg de daglengte bepaald. Bij deze waarnemingen is een zo goed mogelijk passend model opgesteld en vervolgens is daarbij de grafiek getekend. Zie de figuur. Hierbij is de daglengte L in Luxemburg in uren gegeven als functie van de tijd t in dagen met $t=0$ op 1 januari.
Het functievoorschrift dat bij dit model hoort, ziet er als volgt uit:

$$L(t)=12+4{,}1\cdot\sin(a(t-b))$$

figuur



De periode van het model is 365 dagen en de langste dag is op $t=168$.

2p **16** Bepaal de waarden van a en b. Geef de waarde van a in drie decimalen en de waarde van b als geheel getal.

De toename van de daglengte volgens het model is het grootst als de helling van de grafiek van L maximaal is. Met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage kun je de maximale helling bepalen.

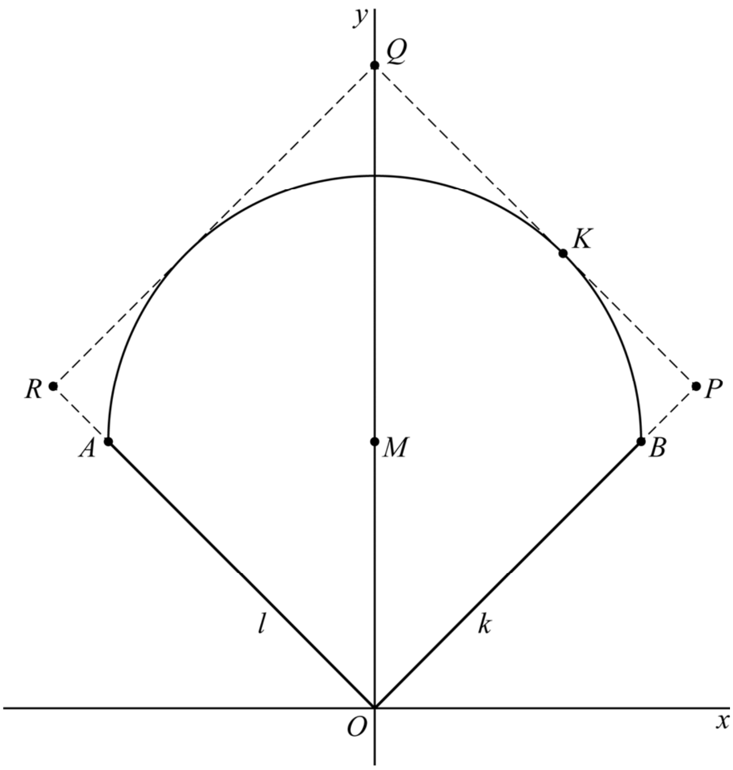
3p **17** Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage de maximale helling van de grafiek van L. Geef je eindantwoord in hele **minuten** per dag.

Vierkant en halve cirkel

Het punt $A(-3, 3)$ ligt op lijn l met vergelijking $y = -x$ en het punt $B(3, 3)$ ligt op lijn k met vergelijking $y = x$.
Door de punten A en B gaat een halve cirkel met diameter AB en middelpunt M.
Voor vierkant $OPQR$ geldt:
- R ligt op l en P ligt op k.
- Zijde PQ raakt de halve cirkel in het punt K.

Zie de figuur. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



5p **18** Bereken exact de coördinaten van K. Je kunt hierbij de figuur op de uitwerkbijlage gebruiken.

Bronvermelding
Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift, dat na afloop van het examen wordt gepubliceerd.