Examen VWO

2021

tijdvak 3
woensdag 7 juli
9.00 - 12.00 uur

wiskunde B

Dit examen bestaat uit 16 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 73 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Formules

Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$$
$$\sin(t-u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$$
$$\cos(t+u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$$
$$\cos(t-u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

Onbekende zijde

Gegeven is driehoek ABC met $AB = 4$ en $BC = 12$.
Punt M is het midden van lijnstuk BC. Verder geldt: $AM = 5$.

4p **1** Bereken algebraïsch de lengte van AC. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Spookje

Op het domein $\left[-\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi\right]$ worden de functies f en g gegeven door:

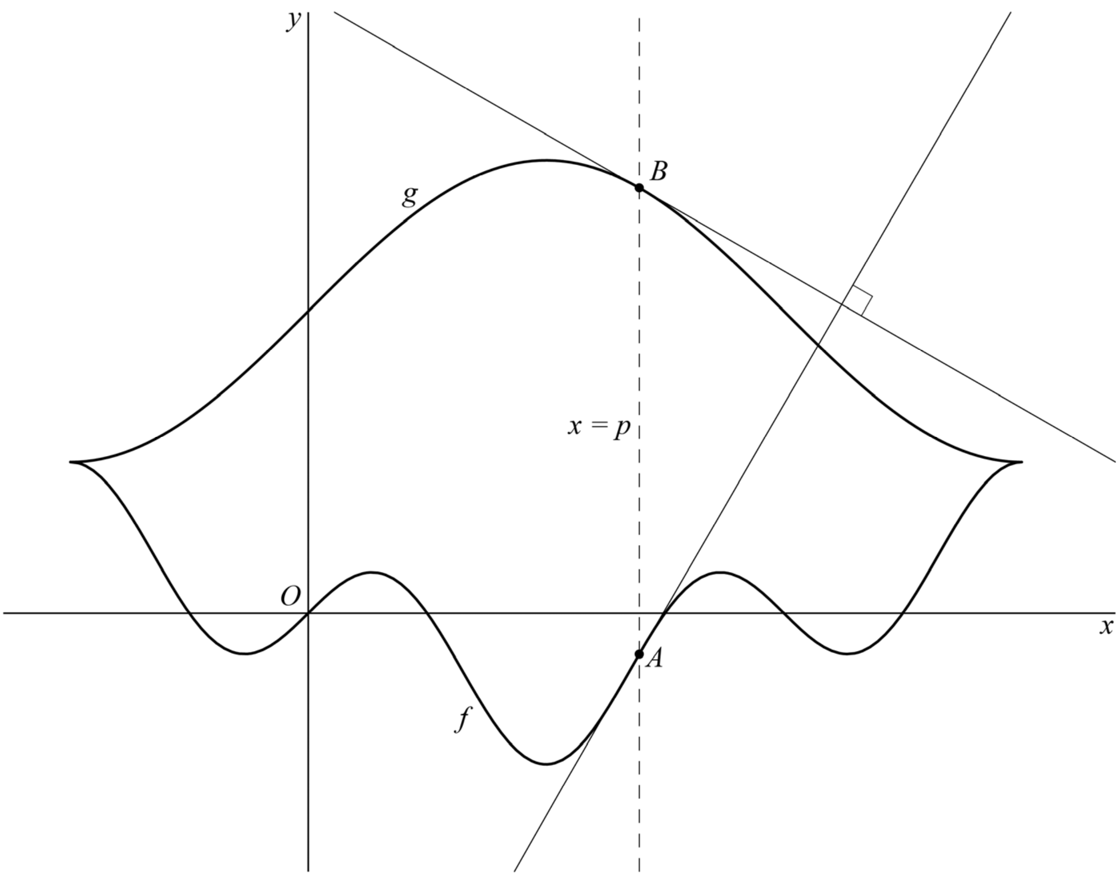
$$f(x) = \sin(x)\cos(2x)$$
$$g(x) = 2 + \sin(x)$$

Er geldt: $f'(x) = 6\cos^3(x) - 5\cos(x)$.

6p **2** Bewijs dat inderdaad geldt: $f'(x) = 6\cos^3(x) - 5\cos(x)$.

In de figuur zijn de grafieken van f en g weergegeven. De verticale lijn met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B. We bekijken de raaklijn aan de grafiek van f in A en de raaklijn aan de grafiek van g in B.

figuur



In de figuur is een waarde van p gekozen waarvoor de twee raaklijnen elkaar loodrecht snijden. Er zijn meerdere waarden van p waarvoor dit het geval is.

6p **3** Bereken exact het **aantal** waarden van p waarvoor de twee raaklijnen elkaar loodrecht snijden.

Het functievoorschrift van f kan worden herleid tot:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x))$$

Dit kan bijvoorbeeld worden bewezen door de vorm $\sin(t+u) - \sin(t-u)$ voor een geschikte keuze van t en u te herleiden.

3p **4** Bewijs dat $\tfrac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x)) = \sin(x)\cos(2x)$.

De grafieken van f en g hebben twee gemeenschappelijke punten, namelijk $\left(-\tfrac{1}{2}\pi, 1\right)$ en $\left(1\tfrac{1}{2}\pi, 1\right)$.

V is het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g.

4p **5** Bereken exact de oppervlakte van V.

Hoogwater

De hoeveelheid water die door een rivier wordt afgevoerd, varieert van moment tot moment. De hoeveelheid water die de rivier maximaal kan afvoeren, noemen we de **capaciteit** van de rivier. Als de capaciteit te laag is, kan de rivier overstromen. Om te kunnen inschatten hoe vaak een overstroming plaatsvindt, gebruiken we het volgende model:

$$C = a - b \cdot \ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right) \qquad \text{met } T > 1 \qquad \text{(formule 1)}$$

Hierin is C de capaciteit in m^3/s en T de zogeheten **herhalingstijd**.
De herhalingstijd is de periode in jaren waarin de waarde van C gemiddeld één keer wordt overschreden. Als bijvoorbeeld $T = 40$, dan zal de rivier gemiddeld één keer in de 40 jaar overstromen.
De waarden van a en b worden berekend met behulp van gegevens uit het verleden. Er geldt altijd: $a > 0$ en $b > 0$.

Voor de Rijn geldt: $a = 5734$ en $b = 1648$. De capaciteit is 12 000 m^3/s.

5p **6** Bereken algebraïsch de herhalingstijd in jaren. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Uit formule 1 is af te leiden dat voor de afgeleide van C geldt:

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T} = \frac{b}{T \cdot (T-1) \cdot \ln\left(\frac{T}{T-1}\right)} \qquad \text{met } T > 1 \qquad \text{(formule 2)}$$

5p **7** Bewijs dit.

Voor elke rivier geldt natuurlijk: hoe groter de herhalingstijd, des te groter is de capaciteit. De grafiek van C zou dus voor elke waarde van a en b (met $a > 0$ en $b > 0$) stijgend moeten zijn.

5p **8** Bewijs met behulp van formule 2 dat de grafiek van C inderdaad stijgend is voor elke waarde van a en b (met $a > 0$ en $b > 0$).

Voor de Maas geldt:

- Bij een capaciteit van 1700 m^3/s is de herhalingstijd gelijk aan 4 jaar.
- Bij een capaciteit van 2100 m^3/s is de herhalingstijd gelijk aan 10 jaar.

Voor toekomstig beleid wil het ministerie van Infrastructuur en Waterstaat voor de Maas weten welke capaciteit hoort bij een herhalingstijd van 100 jaar.

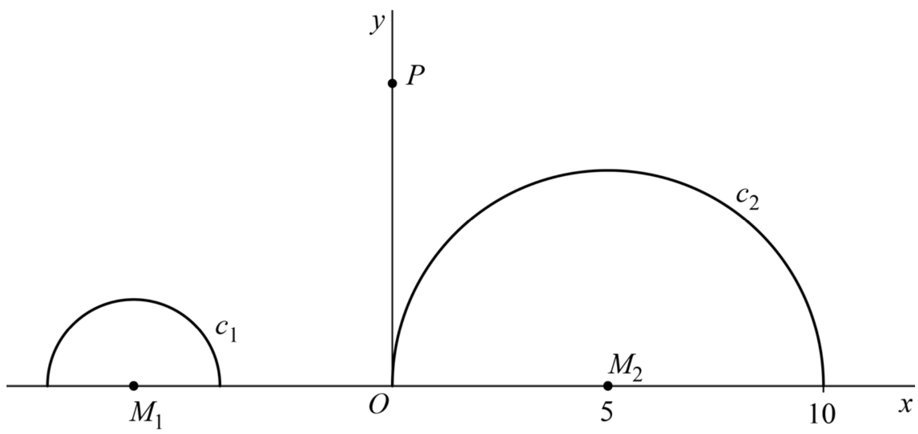
4p **9** Bereken deze waarde van C in m^3/s met behulp van formule 1. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Twee halve cirkels

Gegeven zijn de twee halve cirkels c_1 en c_2.
Voor c_1 geldt: $x^2 + y^2 + 12x = -32$, het middelpunt is M_1 en $y \geq 0$.
Voor c_2 geldt: het middelpunt is $M_2(5, 0)$, de straal is 5 en $y \geq 0$.

Op de positieve y-as ligt een punt P. Zie de figuur.

figuur



P wordt zo op de y-as gekozen dat de afstand van P tot c_1 twee keer zo groot is als de afstand van P tot c_2.

7p **10** Bereken de y-coördinaat van P voor deze situatie. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Twee bewegende punten

Voor $t \geq 0$ beweegt het punt P_1 volgens de bewegingsvergelijkingen:

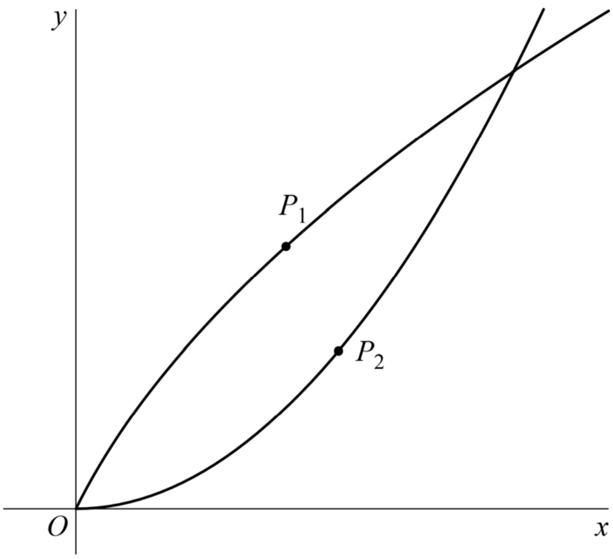
$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 2t \\ y(t) = 4t \end{cases}$$

Tegelijkertijd beweegt het punt P_2 volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = 4t \\ y(t) = 2t^2 \end{cases}$$

In figuur 1 zijn beide banen getekend met daarop de punten P_1 en P_2 op een tijdstip t.

figuur 1



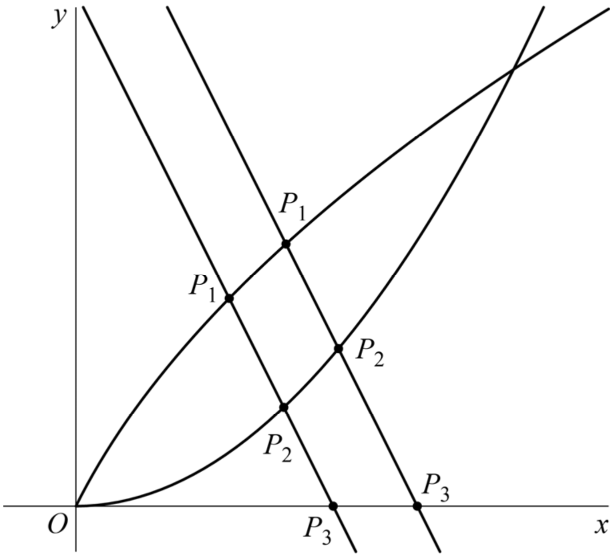
Voor de snelheid v_2 van P_2 geldt: $v_2(t) = 4\sqrt{t^2 + 1}$.

Er is één tijdstip t waarop de punten P_1 en P_2 gelijke snelheid hebben.

5p **11** Bereken exact dit tijdstip.

In figuur 2 zijn nogmaals beide banen getekend.
Op twee tijdstippen, namelijk $t = 0$ en $t = 2$, vallen P_1 en P_2 samen. Op alle andere tijdstippen kun je de lijn l door P_1 en P_2 tekenen. In figuur 2 is dit voor twee tijdstippen gedaan.

figuur 2



De richtingscoëfficiënt van l is gelijk aan -2 voor elke waarde van t (met $t \neq 0$ en $t \neq 2$).

3p **12** Bewijs dit.

Voor elke waarde van t (met $t \neq 0$ en $t \neq 2$) is P_3 het snijpunt van l met de x-as. Zie figuur 2, waarin P_3 is aangegeven voor twee verschillende tijdstippen.

4p **13** Bereken exact op welk tijdstip de x-coördinaat van P_3 gelijk is aan 3.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

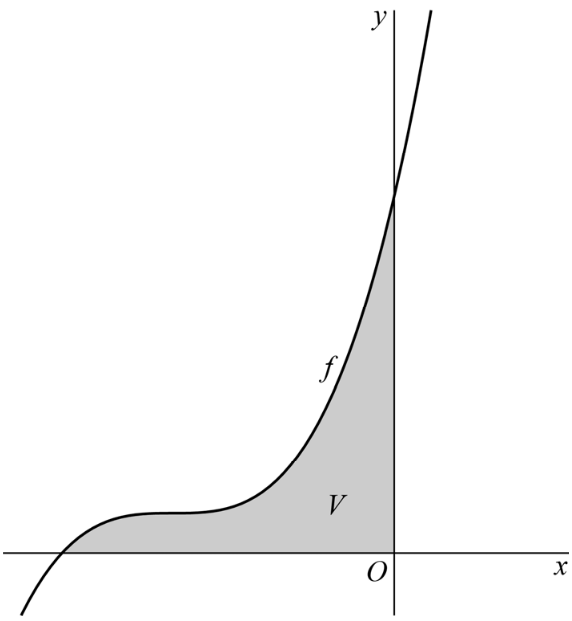
Een derdegraadsfunctie

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$.
Deze functie heeft een inverse functie f^{inv}. Er geldt: $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$.

3p **14** Bewijs dat inderdaad geldt: $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$.

V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de y-as.
Zie de figuur. Deze figuur is niet op schaal.

figuur



Vlakdeel V wordt gewenteld om de y-as. Zo ontstaat een omwentelingslichaam.

3p **15** Bereken de inhoud van dit omwentelingslichaam. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Op de grafiek van f ligt een punt P waarin de raaklijn aan de grafiek van f horizontaal is.
Op de grafiek van f^{inv} ligt een punt Q waarin de raaklijn aan de grafiek van f^{inv} verticaal is.
De lijn door P en Q snijdt de y-as in punt S.

6p **16** Bereken exact de y-coördinaat van S.