

# **Wiskunde B HAVO**

**Syllabus centraal examen  
2010**



Oktober 2008

### **Verantwoording:**

© 2008 Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven vwo, havo, vmbo, Utrecht

Alle rechten voorbehouden. Alles uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enige andere manier zonder voorafgaande toestemming van de uitgever.

CEVO commissie herziening examenprogramma 2008 wiskunde B havo:

Roel van Asselt (Saxion Hogeschool, LICA), voorzitter

Ab van der Roest (docent)  
Sjef van Gisbergen (docent)  
Marian Kollenveld (docent, vaksectie CEVO)  
Peter Kop (docent, vaksectie CEVO)

Henk van der Kooij (CEVO)  
Jenneke Krüger (SLO), secretaris  
Kees Lagerwaard (Cito)

# Inhoud

<b>Voorwoord</b>	<b>4</b>
<b>1. Inleiding</b>	<b>5</b>
<b>2. Verdeling examinering CE/SE</b>	<b>6</b>
<b>3. Specificatie van de globale eindtermen voor het CE</b>	<b>7</b>
Domein B: Veranderingen	8
Domein D: Ruimtemeetkunde 1	8
Domein E: Toegepaste analyse 1	9
Domein H: Toegepaste analyse 2	11
<b>4. Algebraïsche kennis, vaardigheden en inzicht</b>	<b>12</b>
<b>5. Het centraal examen</b>	<b>18</b>
<b>Bijlage 1. Examenprogramma Wiskunde B havo</b>	<b>129</b>

## Voorwoord

Examenprogramma's veranderen van opzet. De minister stelt een examenprogramma op hoofdlijnen vast en wijst in het examenprogramma Domeinen en subdomeinen aan, waarover het centraal examen zich uitstrekt. Vroeger werd in het programma ook bepaald het aantal en de duur van de toetsen. Met ingang van 1 augustus 2007 is dat veranderd. De CEVO stelt het aantal en de tijdsduur van de toetsen van het centraal examen vast, en de wijze waarop het centraal examen wordt afgenomen. Deze vaststelling wordt gepubliceerd in de septembermededeling.

Verder geeft de CEVO in een syllabus een beschrijving van en toelichting op de exameneisen voor een centraal examen, en informatie over een of meer van de volgende onderwerpen:

- toegestane hulpmiddelen,
- specificaties van examenstof
- voorbeeldopgaven,
- bijzondere vormen van examinering (computerexamens),
- toelichting op de vraagstelling,
- begrippenlijsten,
- bekend veronderstelde voorkennis uit de onderbouw,
- bekend veronderstelde onderdelen van Domeinen die verplicht zijn op het schoolexamen

Ten aanzien van de specificaties is nog het volgende op te merken. De functie ervan is een leraar in staat te stellen zich een goed beeld te vormen van wat in het centraal examen wel en niet gevraagd kan worden. Naar hun aard zijn ze niet een volledige beschrijving van alles wat op een examen zou kunnen voorkomen. Het is mogelijk, al zal dat maar in beperkte mate voorkomen, dat op een c.e. ook iets aan de orde komt dat niet met zo veel woorden in deze syllabus staat, maar dat naar het algemeen gevoelen daarvan in het verlengde ligt.

Een syllabus is zodoende een hulpmiddel voor degenen die anderen of zichzelf op een centraal examen voorbereiden. Een syllabus kan ook behulpzaam zijn voor de producenten van leermiddelen en voor nascholers.

De c.e. syllabus is niet van belang voor het schoolexamen. Daarvoor bestaat een handreiking van de SLO, te vinden op [www.slo.nl](http://www.slo.nl).

Syllabi worden per examenjaar vastgesteld. Deze syllabus geldt voor het centraal examen havo van 2010. Voor het jaar 2011 wordt een nieuwe syllabus vastgesteld.

In uitzonderingsgevallen kan een syllabus na publicatie nog worden aangepast, bijvoorbeeld als een in de syllabus beschreven situatie feitelijk veranderd is. De aan een centraal examen voorafgaande Septembermededeling is dan het moment waarop dergelijke veranderingen bekend worden gemaakt. Kijkt u voor alle zekerheid in september 2009 op [www.examenblad.nl](http://www.examenblad.nl)

Deze eerste syllabus is ontworpen door een commissie ad-hoc van de CEVO en in hoofdzaak geschreven door medewerkers van SLO en Cito.

Een eerder concept van de syllabus is in februari 2005 ter inzage gelegd op [www.cevo.nl](http://www.cevo.nl), en is voor advies toegezonden aan de vakinhoudelijke vereniging, de VSNU, de HBO-raad, het Cito en de CEVO-vaksectie. Op grond van de ontvangen reacties en adviezen is de tekst vastgesteld, die u hierbij aantreft.

Voor opmerkingen over deze tekst houdt de CEVO zich steeds aanbevolen. U kunt die zenden aan [info@cevo.nl](mailto:info@cevo.nl) of aan CEVO, postbus 8128, 3503 RC Utrecht.

De voorzitter van de CEVO,  
drs. H.W.Laan.

# 1. Inleiding

De herstructurering van de Tweede Fase 2007 geeft aanleiding tot herziening van alle wiskundeprogramma's. Het voor u liggende programma is gebaseerd op het programma wiskunde B1,2 havo dat is ingevoerd in 1998.

Een commissie vernieuwing wiskundeonderwijs werkt aan geheel nieuwe examenprogramma's voor wiskunde. De invoering van nieuwe programma's is niet voor 2013 te verwachten.

## *. De plaats van het vak in de tweede fase vanaf 2007*

Wiskunde B is profielvak in het profiel NT (Natuur en Techniek) naast de vakken natuurkunde en scheikunde.

Wiskunde A is profielvak in de profielen EM (Economie en Maatschappij) en NG (Natuur en Gezondheid). Desgewenst mag in plaats van wiskunde A in deze twee profielen wiskunde B worden gekozen.

In het profiel NT(Natuur en Techniek) is het vak wiskunde D profielkeuzevak.

## *. De omvang van het programma*

Het vak wiskunde B voor havo heeft een omvang van 360 studielasturen. De studielast van wiskunde B1,2 was 440 studielasturen.

## *. Een korte toelichting bij de herziening van het programma*

Een van de uitgangspunten van deze herzieningsoperatie was dat het nieuwe programma is opgebouwd uit bestaande (sub)domeinen. Er mag dus geen nieuwe leerstof worden toegevoegd. Vergeleken met het huidige programma wiskunde B1,2 zijn combinatoriek en kansrekening vervallen en zijn er delen van ruimtemeetkunde en toegepaste analyse geschrapt. Gelet op de geringere studielast was een omvangrijke reductie onvermijdelijk.

Voor leerlingen in het profiel NG is het te overwegen in plaats van wiskunde A als profielvak wiskunde B te kiezen, met name als ook natuurkunde als profielkeuzevak wordt gekozen.

## *. De leerstofdomeinen voor CE en SE*

Het examenprogramma bestaat uit domeinen en subdomeinen. In onderstaand overzicht staan voor de domeinen nog de lettercodes die gebruikt werden in het examenprogramma wiskunde B havo dat in mei 1998 is gepubliceerd.

Het domein A Vaardigheden neemt een bijzondere positie in. Informatie-, onderzoeks- en technisch-instrumentele vaardigheden komen zowel in CE als SE aan bod, maar niet steeds op precies dezelfde manier. Subdomein A4 zal niet in het centraal examen worden getoetst.

Subdomein A5 is nieuw en geeft aan dat algebraïsche vaardigheden ook onafhankelijk van de grafische rekenmachine (GR) moeten worden beheerst. Specificaties van deze eisen worden in hoofdstuk 4 beschreven.

## 2. Verdeling examinering CE/SE

### . Het centraal examen

Het centraal examen heeft betrekking op de subdomeinen A5, B1, D1, D2, E1, E2, E3, E4 en H1, in combinatie met de subdomeinen A1, A2 en A3.

De CEVO stelt het aantal en de tijdsduur van de zittingen van het centraal examen vast.

De CEVO maakt indien nodig een specificatie bekend van de examenstof van het centraal examen.

### . Het schoolexamen

Het schoolexamen heeft betrekking op domein A in combinatie met

- de domeinen B en D;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: een of meer van de overige domeinen en subdomeinen waarop het centraal examen betrekking heeft;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: andere vakonderdelen, die per kandidaat kunnen verschillen.

In schema:

domein	subdomein	in CE	moet in SE	mag in SE
A Vaardigheden	A1: Informatievaardigheden	X	X	
	A2: Onderzoeksvaardigheden	X	X	
	A3: Technisch-instrumentele vaardigheden	X	X	
	A4: Oriëntatie op studie en beroep		X	
	A5: Algebraïsche vaardigheden	X	X	
B Veranderingen	B1: Veranderingen	X	X	
D Ruimte meetkunde 1	D1: Fragmenttekeningen van ruimtelijke objecten	X	X	
	D2: Oppervlakte en inhoud	X	X	
E Toegepaste analyse 1	E1: Functies en grafieken	X		X
	E2: Vergelijkingen en ongelijkheden	X		X
	E3: Afgeleide functies	X		X
	E4: Periodieke functies	X		X
H Toegepaste analyse 2	H1: Afgeleide functies 2	X		X

Van de (sub)domeinen die in het centraal examen worden getoetst staat een gedetailleerder beschrijving in hoofdstuk 3.

Een nadere uitwerking van voor wiskunde B relevante algebraïsche kennis, vaardigheden en inzicht (gekoppeld aan subdomein A5) is te vinden in hoofdstuk 4.

### 3. Specificatie van de globale eindtermen voor het CE

#### Domein A: Vaardigheden

##### Subdomein A1: Informatievaardigheden

1. De kandidaat kan, mede met behulp van ICT, informatie verwerven, selecteren, verwerken, beoordelen en presenteren.

##### Specificatie

De kandidaat kan

- 1.1 artikelen of berichten uit (nieuws)media of vakliteratuur waarin wiskundige presentaties, redeneringen of berekeningen voorkomen, kritisch analyseren.
- 1.2 informatie verwerven en selecteren uit schriftelijke, mondelinge en audiovisuele bronnen, mede met behulp van ICT. Zo lang het nog een schriftelijk eindexamen is, beperkt deze eindterm zich tot het selecteren van informatie uit een gegeven context.
- 1.3 benodigde gegevens halen en interpreteren uit grafieken, tekeningen, simulaties, schema's, diagrammen en tabellen, mede met behulp van ICT.
- 1.4 gegevens weergeven in grafieken, tekeningen, schema's, diagrammen en tabellen, mede met behulp van ICT.
- 1.5 hoofd- en bijzaken onderscheiden.
- 1.6 feiten met bronnen verantwoorden.
- 1.7 informatie analyseren, schematiseren en structureren.
- 1.8 de betrouwbaarheid beoordelen van informatie en de waarde daarvan vaststellen voor het op te lossen probleem of te maken ontwerp.

##### Subdomein A2: Onderzoeksvaardigheden

2. De kandidaat kan een gegeven probleemsituatie inventariseren, vertalen in een wiskundig model, binnen dat model wiskundige oplostechnieken hanteren en de gevonden oplossingen betekenis geven in de context.

##### Specificatie

De kandidaat kan

- 2.1 logische relaties tussen gegevens, beweringen en resultaten aanbrengen en beoordelen en relevante gegevens scheiden van minder relevante gegevens.
- 2.2 gegevens met elkaar en met de probleemstelling in verband brengen, op grond daarvan een passende aanpak kiezen en deze zo mogelijk opsplitsen in deeltaken.
- 2.3 in een tekst verstrekte gegevens doelmatig weergeven in een geschikte wiskundige representatie (model).
- 2.4 vaststellen of een gekozen model voldoet en, indien nodig, een bijstelling hiervan suggereren.
- 2.5 vaststellen of er aanvullende gegevens nodig zijn en zo ja, welke.
- 2.6 onderzoeken in hoeverre het model bijgesteld moet worden ten gevolge van wijzigingen in de gegevens.
- 2.7 een bij het model passende wiskundige oplossingsmethode correct uitvoeren.
- 2.8 resultaten betekenis geven in de context en binnen die context kritisch analyseren.
- 2.9 de nauwkeurigheid van de gegevens of werkwijzen betrekken bij de beoordeling van het eindresultaat.
- 2.10 reflecteren op de gemaakte keuzen voor representatie, werkwijze, oplossingsproces en resultaten en deze onder woorden brengen.

##### Subdomein A3: Technisch-instrumentele vaardigheden

3. De kandidaat kan bij raadplegen, verkennen en presenteren van wiskundige informatie en bij uitvoeren van wiskundige bewerkingen en redeneringen gebruik maken van toepassingen van ICT.

### **Subdomein A5: Algebraïsche vaardigheden**

5. De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige en algebraïsche vaardigheden en formules, heeft daar inzicht in en kan de bewerkingen uitvoeren met, maar ook zonder, gebruik van ICT-middelen zoals de grafische rekenmachine.

#### **Specificatie**

De kaders voor dit subdomein worden geschetst in hoofdstuk 4.

### **Domein B: Veranderingen**

#### **Subdomein B1: Veranderingen**

6. De kandidaat kan het veranderingsgedrag van een grafiek, tabel of functie onder meer door middel van toenamendiagrammen en differentiequotiënten beschrijven en differentiequotiënten berekenen en interpreteren, ook vanuit een contextprobleem.

#### **Specificatie**

De kandidaat kan

- 6.1 in een situatie de relevante variabelen vaststellen en daarmee een bij de situatie passende grafiek tekenen.
- 6.2 vaststellen op welke intervallen er sprake is van een constant, een stijgend of een dalend verloop van een grafiek.
- 6.3 vaststellen of een stijging/daling toenemend of afnemend is.
- 6.4 vaststellen of er minima en maxima zijn en uit een grafiek aflezen hoe groot die zijn.
- 6.5 veranderingen beschrijven met behulp van differenties, bijvoorbeeld  $\Delta f$ .
- 6.6 een toenamendiagram bij een gegeven grafiek of tabel tekenen en daaruit conclusies trekken.
- 6.7 veranderingen beschrijven en vergelijken met behulp van differentiequotiënten, bijvoorbeeld  $\frac{\Delta K}{\Delta q}$ .
- 6.8 differentiequotiënten interpreteren in relatie met de context.
- 6.9 differentiequotiënten berekenen in geval de functie is gegeven door een tabel, grafiek of formule.
- 6.10 differentiequotiënten interpreteren als maat voor de gemiddelde verandering op een interval.
- 6.11 bij afnemende stapgrootte differentiequotiënten interpreteren als benadering van de steilheid of helling van de grafiek in een gegeven punt.

### **Domein D: Ruimte meetkunde 1**

#### **Subdomein D1: Fragmenttekeningen van ruimtelijke objecten**

7. De kandidaat kan van een ruimtelijk object aanzichten, uitslagen en vlakke doorsneden tekenen, interpreteren, er berekeningen aan uitvoeren en uit een serie parallelle doorsneden conclusies trekken over vorm en inhoud van zo'n object.

#### **Specificatie**

De kandidaat kan

- 7.1 aanzichten in verschillende kijkrichtingen tekenen, interpreteren en er berekeningen mee uitvoeren.
- 7.2 uitslagen tekenen, interpreteren en er berekeningen aan uitvoeren.
- 7.3 in een gegeven voorstelling van een ruimtelijk object een vlakke doorsnede tekenen en er berekeningen mee uitvoeren.
- 7.4 een vlakke doorsnede van een ruimtelijk object op ware grootte tekenen.
- 7.5 uit een serie parallelle doorsneden van een ruimtelijk object een conclusie trekken over de vorm van het object.
- 7.6 uit een serie parallelle doorsneden van een ruimtelijk object (bijvoorbeeld een scan) een schatting afleiden over de inhoud van het object.

#### **Subdomein D2: Oppervlakte en inhoud**

8. De kandidaat kan de oppervlakte van vlakke en ruimtelijke figuren berekenen, van ruimtelijke figuren de inhoud berekenen en schatten en het effect van schaalvergroting op zowel inhoud als oppervlakte beargumenteren.

## Specificatie

De kandidaat kan

- 8.1 de oppervlakte van een driehoek, een parallellogram en een cirkel berekenen.
- 8.2 de oppervlakte van samengestelde vlakdelen berekenen door middel van opsplitsen in delen dan wel aanvullen tot bekende vormen.
- 8.3 de oppervlakte berekenen van een bol, cilindermantel en een kegelmantel.
- 8.4 de inhoud berekenen van een prisma, piramide, kegel, cilinder en bol.
- 8.5 van verschillende ruimtelijke vormen de inhoud schatten en vergelijken.
- 8.6 beargumenteren wat het effect is van schaalvergroting op inhoud en oppervlakte, bijvoorbeeld bij maquettes of de bouw van zoogdieren.

## Domein E: Toegepaste analyse 1

### Subdomein E1: Functies en grafieken

9. De kandidaat kan standaardfuncties (machtsfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies en goniometrische functies) hanteren, interpreteren binnen een context, de grafieken beschrijven en in een functievoorschrift vastleggen, eenvoudige vergelijkingen oplossen en werken met eenvoudige transformaties.

### Specificatie

De kandidaat kan

- 9.1 de kenmerkende eigenschappen (domein, bereik, stijgend, dalend, asymptotisch gedrag) noemen van de volgende standaardfuncties: machtsfuncties met rationale exponent, exponentiële functies, logaritmische functies en de goniometrische functies  $\sin x$  en  $\cos x$ .
- 9.2 een beschreven groeiproses in verband brengen met een van bovengenoemde standaardfuncties.
- 9.3 het functievoorschrift bepalen bij de inverse functie van een machtsfunctie (op een positief domein) en van een exponentiële functie.
- 9.4 eenvoudige transformaties (translatie en lijnvermenigvuldiging) en combinaties daarvan uitvoeren op de standaardgrafieken.
- 9.5 de grafieken van  $y = f(x) + c$ ,  $y = f(x + c)$ ,  $y = c \cdot f(x)$  en  $y = f(c \cdot x)$  in verband brengen met de grafiek van de standaardfunctie  $f$ .
- 9.6 het effect van translaties en lijnvermenigvuldigingen op standaardgrafieken verwerken in het functievoorschrift.
- 9.7 in een concrete situatie transformaties uitvoeren en die interpreteren in relatie met de context.
- 9.8 vergelijkingen oplossen van het type  $x^n = c$ , waarbij  $c$  een constante is.
- 9.9 vergelijkingen oplossen van het type  ${}^a\log x = c$ , waarbij  $c$  een constante is.
- 9.10 vergelijkingen oplossen van het type  $a^x = c$ , waarbij  $c$  een constante is.
- 9.11 logaritmen met een willekeurig grondtal omrekenen naar logaritmen met het grondtal 10.
- 9.12 de eigenschappen  $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$  en  $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$  gebruiken.
- 9.13 de eigenschappen  ${}^g\log ab = {}^g\log a + {}^g\log b$  en  ${}^g\log a^p = p \cdot {}^g\log a$  gebruiken.

*N.B.1 Vergeleken met het oude programma wiskunde B1,2 zijn  $\sin x$  en  $\cos x$  toegevoegd aan de standaardfuncties (zie eindterm 9.1).*

*N.B.2 Het getal  $e$  behoort niet tot het programma; er zullen dus geen  $e$ -machten en natuurlijke logaritmen voorkomen in het centraal examen.*

### Subdomein E2: Vergelijkingen en ongelijkheden

10. De kandidaat kan eenvoudige vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels van twee lineaire vergelijkingen oplossen met behulp van een algoritme, in voorkomende gevallen grafisch oplossen of numeriek benaderen en de oplossingen interpreteren in relatie met de context.

## Specificatie

De kandidaat kan

- 10.1 een grafische voorstelling maken van vergelijkingen van het type  $ax + by = c$ .
- 10.2 een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden oplossen.
- 10.3 een algoritme gebruiken voor het oplossen van tweedegraads vergelijkingen.
- 10.4 vergelijkingen oplossen van de vorm  $f(x) + c = d$ ,  $f(x + c) = d$ ,  $c \cdot f(x) = d$  en  $f(c \cdot x) = d$ , met  $c$  en  $d$  constanten en  $f$  een standaardfunctie.
- 10.5 in concrete gevallen de snijpunten van grafieken numeriek benaderen.
- 10.6 ongelijkheden oplossen met behulp van grafieken.
- 10.7 de oplossingen van (stelsels) vergelijkingen en ongelijkheden interpreteren in relatie met de context.

## Subdomein E3: Afgeleide functies

11. De kandidaat kan de lokale verandering van een functie benaderen zowel met een differentiaalquotient als numeriek-grafisch en de afgeleide functie van een polynoom en van eenvoudige goniometrische functies bepalen en gebruiken zowel voor bestudering van het veranderingsgedrag van een functie als voor het benaderen van een functiewaarde.

## Specificatie

De kandidaat kan

- 11.1 het differentiaalquotient gebruiken als maat voor de lokale verandering van een functie en als richtingscoëfficiënt van de raaklijn.
- 11.2 de helling in een punt numeriek-grafisch benaderen als de functie gegeven is door een formule.
- 11.3 de afgeleide functie gebruiken om een functiewaarde te benaderen (1e graads benadering).
- 11.4 de afgeleide functie gebruiken voor het bestuderen van het veranderingsgedrag van een functie, ook in concrete situaties.
- 11.5 de diverse notaties voor de afgeleide functie  $f'(x)$ ,  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d}{dx} f(x)$ ,  $\frac{dK}{dq}$ ,  $\frac{ds}{dt}$  herkennen en gebruiken.
- 11.6 de afgeleide functie gebruiken bij het verifiëren van extreme waarden van een functie.
- 11.7 de afgeleide functie bepalen van veeltermfuncties.
- 11.8 in concrete gevallen binnen een context de afgeleide functie gebruiken bij het bepalen van een optimale situatie.

*N.B. De specificatie voor het differentiëren van goniometrische functies wordt gegeven in eindterm 13.1.*

## Subdomein E4: Periodieke functies

12. De kandidaat kan periodieke verschijnselen beschrijven door middel van een goniometrische functie, de bijbehorende sinusoïde tekenen en kenmerkende eigenschappen ervan benoemen en alle oplossingen van een eenvoudige goniometrische vergelijking op een gegeven interval vinden.

## Specificatie

De kandidaat kan

- 12.1 graden omrekenen in radialen en omgekeerd.
- 12.2 de cirkelbeweging en de harmonische beweging in verband brengen met goniometrische functies.
- 12.3 de begrippen schommeling en trend hanteren.
- 12.4 de grafiek tekenen van functies van de vorm  $f(x) = a \cdot \sin b(x+c) + d$  en  $f(x) = a \cdot \cos b(x+c) + d$ .
- 12.5 in concrete situaties vergelijkingen oplossen van het type  $f(x) = k$ , met  $k$  een constante en  $f$  een functie als hierboven genoemd.
- 12.6 in concrete situaties de periodiciteit gebruiken bij het vinden van alle oplossingen in een gegeven interval.
- 12.7 bij een gegeven sinusoïde het bijbehorend functievoorschrift opstellen.
- 12.8 gebruik maken van de begrippen amplitude, evenwichtstand, faseverschil en frequentie bij het beschrijven van een periodiek verschijnsel.
- 12.9 een periodiek verschijnsel beschrijven door een geschikte goniometrische functie.

## Domein H: Toegepaste analyse 2

### Subdomein H1: afgeleide functies 2

13. De kandidaat kan voor het bepalen van de afgeleide functie en de interpretatie daarvan binnen een context gebruik maken van de som-, verschil en productregel en van de kettingregel bij enkelvoudig samengestelde functies

#### Specificatie

De kandidaat kan

- 13.1 de afgeleide bepalen van twee typen standaardfuncties: machtsfuncties en goniometrische functies
- 13.2 het verband aangeven tussen de afgeleide van  $y = f(x)$  en de afgeleide van  $y = f(x) + c$ ,  $y = f(x + c)$ ,  $y = c \cdot f(x)$  en  $y = f(c \cdot x)$ .
- 13.3 voor het bepalen van de afgeleide functie de som-, verschil- en/of productregel gebruiken.
- 13.4 de kettingregel gebruiken bij het bepalen van de afgeleide van enkelvoudig- samengestelde functies.
- 13.5 in concrete gevallen binnen een context de afgeleide functie gebruiken bij het bepalen van een optimale situatie.

## 4. Algebraïsche kennis, vaardigheden en inzicht

In dit hoofdstuk worden de algebra-eisen beschreven die aan examenkandidaten wiskunde B worden gesteld (subdomein A5). Niet aan de orde komen de vaardigheden die horen bij het differentiëren, zoals ze zijn beschreven in domein E (eindterm 11.7) en domein H (13.1, 13.3 en 13.4). Het kunnen toepassen van de regels bij het differentiëren blijft onverkort gehandhaafd.

De eisen die aan de wiskunde B-kandidaten worden gesteld ten aanzien van algebra zijn divers. Zo moet een kandidaat in staat zijn algebra te gebruiken bij het modelleren en oplossen van een in een context gesteld probleem, maar zal hij ook in staat moeten zijn om een meer abstracte opgave op te lossen of een algebraïsch bewijs te leveren.

In het volgende wordt het algebraïsch handelen onderscheiden in specifieke vaardigheden (kennis en manipulatievaardigheden) en algemene vaardigheden (strategieën hanteren die tot een oplossing leiden; een stappenplan ontwikkelen; het vertonen van inzicht in de structuur van een probleem). Bij de opsplitsing in specifieke- en algemene vaardigheden is onderstaande lijst te maken. De lijst heeft niet de pretentie volledig dekkend te zijn, maar moet meer als een goede indicatie worden gezien. Bij elk van de onderdelen worden voorbeelden gegeven die het niveau van beheersing illustreren.

Opmerking vooraf: op de plaats van de letters  $A$ ,  $B$  en  $C$  kunnen getallen of variabelen maar ook eenvoudige vormen, bijvoorbeeld van het type  $ax + b$  of  $\frac{a}{x} + b$ , worden geplaatst. De regels kunnen zowel van links naar rechts als van rechts naar links worden uitgevoerd. Verder geldt voor de specifieke vaardigheden dat een aantal van deze activiteiten niet geïsoleerd in een examen zal voorkomen maar als een tussenstap in een uitwerkings- of oplossingsproces.

### Specifieke algebraïsche vaardigheden

#### A *Bewerkingen met breuken*

$$I \quad \frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{A+B}{AB}$$

$$II \quad \frac{1}{A} + 1 = \frac{A+1}{A}$$

$$III \quad \frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD}$$

$$IV \quad A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C} = \frac{A}{C} \cdot B = A \cdot B \cdot \frac{1}{C}$$

$$V \quad \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

$$VI \quad \frac{A}{\frac{B}{C}} = A \cdot \frac{C}{B} = \frac{A \cdot C}{B}$$

#### Voorbeelden:

A1  $\frac{1}{4} - \frac{3}{7}$  als één breuk schrijven

A2 De vergelijking opstellen van de lijn door (1, 2) en (4, 3) leidt via de hellingscoëfficiënt  $\frac{1}{3}$  tot het antwoord  $y = \frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$

$$A3 \quad \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x} = \frac{2x - (x-1)}{2x(x-1)} = \frac{x+1}{2x^2 - 2x}$$

$$A4 \quad \frac{1}{x^3} + 1 = \frac{1+x^3}{x^3}$$

$$A5 \quad \frac{x^2}{2x^2 - x^3} = \frac{1}{2-x}$$

$$A6 \quad \text{kunnen verklaren waarom: } \left(1 - \frac{x}{y}\right) \left(\frac{1}{x-y}\right) = -\frac{1}{y}$$

$$A7 \quad \frac{1}{x^2y} + \frac{1}{xy^2} = \frac{y+x}{x^2y^2}$$

$$A8 \quad -\frac{7}{3} \cdot \frac{17}{2} = -\frac{119}{6}$$

$$A9 \quad \frac{2a^2b}{5c} \cdot \frac{10a^4b^{-1}}{2c} = \frac{2a^6}{c^2}$$

$$A10 \quad \frac{6}{\frac{4}{5}} = 7\frac{1}{2} \text{ of } \frac{15}{2}$$

$$A11 \quad \frac{a}{\frac{ab}{a^2}} = a \cdot \frac{a^2}{ab} = \frac{a^2}{b}$$

## **B Wortelvormen**

$$I \quad \sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \quad (A, B \geq 0)$$

$$II \quad \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (A \geq 0, B > 0)$$

$$III \quad \sqrt{A+B} = C \rightarrow A = (C-B)^2$$

### Voorbeelden:

$$B1 \quad \sqrt{A^2 \cdot B} = \sqrt{A^2} \cdot \sqrt{B} = A\sqrt{B} \quad (A \geq 0)$$

$$B2 \quad \sqrt{12} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$B3 \quad \sqrt{4x} + \sqrt{x} = 3\sqrt{x}$$

$$B4 \quad \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{5} \text{ of } \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$B5 \quad \sqrt{\frac{4x^2}{7}} = \frac{2x}{\sqrt{7}} \text{ (of } \frac{2}{7}x\sqrt{7}) \quad (x \geq 0)$$

B6 Examen havo wi B1,2 2005 tijdvak 1 vraag 22:

Gegeven is de familie functies (voor elke waarde van  $p$ ):  $h(x) = (x+4)(p+4x-x^2)$ .

De grafiek van  $h$  heeft twee toppen  $A$  en  $B$ . Punt  $A$  ligt links van de  $y$ -as en punt  $B$  rechts van de  $y$ -as. Aangetoond kan worden dat de  $x$ -coördinaten van deze twee toppen ( $x_A$  en  $x_B$ ) als volgt afhangen van de waarde van  $p$ :

$$x_A = -\sqrt{\frac{p+16}{3}} \quad \text{en} \quad x_B = \sqrt{\frac{p+16}{3}}$$

a. Bereken algebraïsch voor welke waarde van  $p$  geldt dat  $x_B = 8$ .

B7 De vergelijking  $\sqrt{x}+1=x$  omwerken tot  $x=(x-1)^2$ , met  $x \geq 0$ ; vervolgens kan deze vierkantsvergelijking exact worden opgelost.

### C. Bijzondere producten en haakjes verdrijven

I  $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$  (alleen van links naar rechts)

II  $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$  (alleen van links naar rechts)

III  $(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$

Voorbeelden:

C1  $(2x + \frac{1}{2})^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$

C2 Examen havo wiskunde B1,2 2005 tijdvak 1 vraag 21:

Gegeven is de functie  $f(x) = -x^3 + 27x + 44$

Een familie van functies is gegeven door  $h(x) = (x+4)(p+4x-x^2)$ , waarbij  $p$  elk reëel getal kan voorstellen.

a. Toon aan met behulp van algebra dat er een waarde van  $p$  is waarbij de bijbehorende functie  $h$  gelijk is aan de functie  $f$ .

### D. Exponenten en logaritmen

Regels voor machten

I  $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

II  $(a^p)^q = a^{pq}$

III  $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$

IV  $\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$

Regels voor logaritmen

I  ${}^g \log a + {}^g \log b = {}^g \log ab$

II  ${}^g \log a^p = p \cdot {}^g \log a$

Voorbeelden:

D1  $(a^{-5}b)(a^3bc) = a^{-2}b^2c$

D2  $\sqrt[3]{8} = 2$

D3  $2^{2x} = (2^x)^2$  of  $2^{2x} = (2^2)^x = 4^x$

D4  $3^x = 5$  oplossen geeft  $x = \frac{\log 5}{\log 3}$  en dan eventueel met de GRM kunnen benaderen.

D5  $\frac{10c^{-3}}{100c^{-5}} = \frac{c^2}{10}$

D6 Examen havo wiskunde B1,2 2004 tijdvak 1 vraag 17:  
Gegeven is de functie  $f(x) = \log(4 - x)$ .  
Gegeven is verder de functie  $g(x) = 2 \cdot \log(x+2)$   
Met domein  $-2 < x < 4$  is de functie  $h$  gegeven door  $h(x) = f(x) + g(x)$ .  
Het functievoorschrift van  $h$  kan geschreven worden als  $h(x) = \log(16+12x - x^3)$ .  
a. Toon dit algebraïsch aan.

**E Goniometrie**

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

E1  $\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \dots$  met exacte oplossingen

E2  $2x \sin x = x \rightarrow x = \dots$  met exacte oplossingen

E3  $\cos(2x - \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2} \rightarrow x = \dots$  met exacte oplossingen

E4 Gegeven de functie  $f(x) = 3\sin(2x + \pi) + 4$  met  $x \in [0, \pi]$   
Bepaal op algebraïsche wijze de coördinaten van het maximum.

E5 Gegeven de functie  $g(x) = x \cdot \sin x$   
Bepaal de exacte helling van de raaklijn aan de grafiek in het punt  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}\sqrt{2})$ .

**F Omwerken van expressies en substitutie van en in expressies**

Voorbeelden:

F1  $a$  uitdrukken in  $b$  als gegeven is:  $\frac{4a}{a+b} = 10 - b$

F2 Substitueer  $x = t - 1$  in  $x^2 - 2x + 8$  en werk uit

F3 Substitueer voor  $t$  de uitdrukking  $\frac{u}{2} + 1$  en schrijf in machten van  $u$ :  $\frac{4t^2}{2t - 2}$

### **G Vergelijkingen oplossen met behulp van algemene vormen**

I  $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$  of  $B = 0$

II  $A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow A = 0$  of  $B = C$

III  $\frac{A}{B} = C \Leftrightarrow A = B \cdot C$  met  $B \neq 0$

IV  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \cdot D = B \cdot C$  met  $B, D \neq 0$

V  $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = B$  of  $A = -B$

#### Voorbeelden:

G1 Los op  $x^3 - x = 0$

G2 Los op  $x(x-2)(x+2) = x+2$

G3  $\frac{v}{v+1} = -2 \Leftrightarrow -2v - 2 = v$  met  $v \neq -1 \Rightarrow v = -\frac{2}{3}$

G4  $a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3$  of  $a = -3$

G5  $(x-3)^2 = 16 \Rightarrow x-3 = 4$  of  $x-3 = -4$

### **H Vergelijkingen oplossen van de eerste en tweede graad met behulp van een standaardalgoritme**

#### Voorbeelden:

H1 Los op:  $2x - 4 = \frac{1}{2}x + \sqrt{2}$ . De oplossing is  $x = \frac{4 + \sqrt{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2}$

H2 Los op:  $x^2 + 5x + \frac{1}{4} = 0$ . De oplossing is  $x = -\frac{5}{2} + \sqrt{6}$  of  $x = -\frac{5}{2} - \sqrt{6}$

### **I Ongelijkheden oplossen van het type $f(x) \leq g(x)$**

Indien mogelijk  $f(x)=g(x)$  exact en verder grafisch.

#### Voorbeelden:

I1 Los op:  $\frac{4}{x} \leq x$

I2 Los op:  $\sqrt{p} + 6 \geq p$

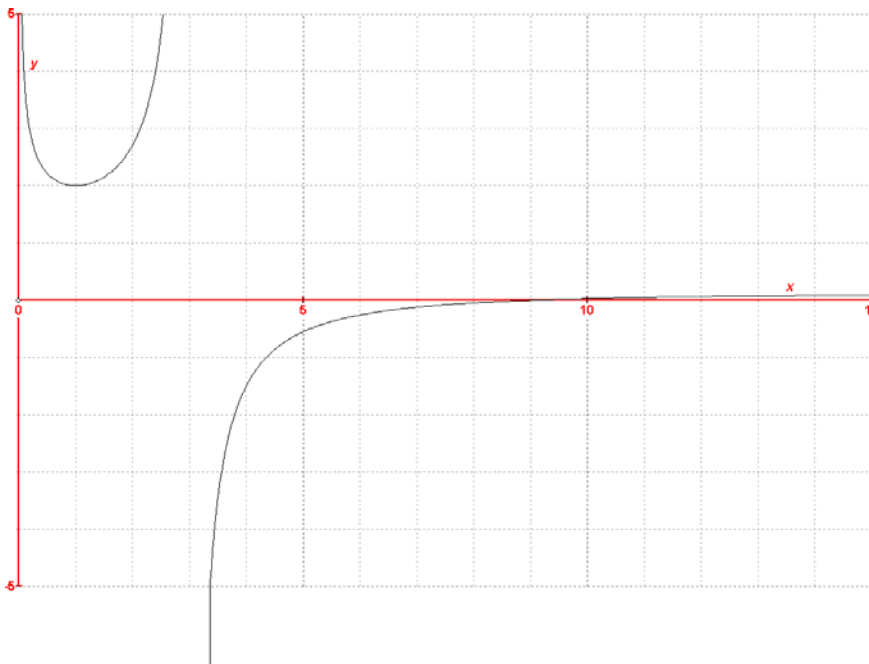
### **Algemene algebraïsche vaardigheden**

- I. Kwalitatief redeneren aan de hand van een gegeven expressie (zoals: getransformeerde standaardfuncties als zodanig herkennen en daarmee vanuit de kenmerkende karakteristieken redeneren ipv. rekenen)

- II. Het doorzien van de structuur van een formule en daarmee kunnen werken
- III. complexe delen van een expressie vervangen door 'plaatsvervangers' zodat herkenbare expressies ontstaan

**Enkele voorbeelden die deze vaardigheden illustreren**

- 1 Gegeven is de formule  $N_{\max} = \frac{8289,3}{B} \cdot (1,778 - \log B)$   
 Leg uit hoe je uitsluitend aan de hand van de formule voor  $N_{\max}$  – dus zonder gebruik van de GR – kunt beredeneren dat hier sprake is van een dalende functie.
- 2 Noem  $p = 2^x$  en los daarmee vervolgens exact op:  $2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 10 = 0$
- 3 Gegeven is  $\frac{4}{5+x^2}$ . Vul voor  $x = \frac{1}{4}$  in en bereken de exacte waarde van de breuk. Verklaar waarom er ongeveer 0,8 uit moe(s)t komen.
- 4 Los op  $\cos^2 x + \cos x = 0$
- 5 Gegeven is de functie  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x-3}$ . De grafiek van  $f$  is te zien in de figuur.



De grafiek van  $f$  snijdt de  $x$ -as in het punt  $(9,0)$ .  
 Beredeneer waarom de grafiek van  $f$  een maximum moet hebben.

- 6 Gegeven de functie  $f(x) = \log\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)$   
 Beredeneer waarom de grafiek van  $f$  geen nulpunten heeft.

- 7 Gegeven de grafiek van  $f(x) = \frac{1}{2\sin(x)+3}$   
 Beredeneer waarom de grafiek van  $f$  geen verticale asymptoot heeft.

## 5. Het centraal examen

### *. hulpmiddelen*

Bij het centraal schriftelijk eindexamen mogen de kandidaten gebruik maken van een grafische rekenmachine. De CEVO publiceert jaarlijks een lijst van toegestane grafische rekenmachines. Bij het wiskunde B examen zullen geen formules beschikbaar worden gesteld.

### *. significantie*

Er wordt van kandidaten bij wiskunde B niet verlangd dat zij kennis hebben van regels voor het aantal significante cijfers. Daarom zal bij vragen op het centraal examen worden aangegeven in welke nauwkeurigheid een antwoord dient te worden gegeven of er zal genoeg worden genomen met antwoorden in uiteenlopende aantallen decimalen.

### *. bekend veronderstelde basiskennis*

Het examenprogramma bouwt voort op veronderstelde basiskennis die in de onderbouw van havo is verworven. Zo wordt er bijvoorbeeld van uitgegaan dat de kandidaat (al dan niet met behulp van de rekenmachine) berekeningen kan uitvoeren. Berekeningen uitvoeren met behulp van de stelling van Pythagoras is een ander voorbeeld. Ook wordt er van uitgegaan dat de kandidaat kennis heeft van het metrieke stelsel. Op dit punt is er geen enkel verschil tussen de examenprogramma's van voor 2007 en het nieuwe programma wiskunde B.

### *. algebraïsche vaardigheden*

Hoewel de grafische rekenmachine een krachtig hulpmiddel is, ook bij het oplossen van vergelijkingen, dient de kandidaat ook te beschikken over algebraïsche vaardigheden. In hoofdstuk 3 is dit thema nader uitgewerkt.

### *. ICT*

Zo lang het een schriftelijk eindexamen is, wordt hier met ICT uitsluitend de grafische rekenmachine bedoeld.

# Bijlage 1. Examenprogramma Wiskunde B havo

## Het eindexamen

Het eindexamen bestaat uit het centraal examen en het schoolexamen.

Het examenprogramma bestaat uit de volgende domeinen:

- Domein A Vaardigheden
- Domein B Veranderingen
- Domein D Ruimte meetkunde 1
- Domein E Toegepaste analyse 1
- Domein H Toegepaste analyse 2.

## Het centraal examen

Het centraal examen heeft betrekking op de subdomeinen A5, B1, D1, D2, E1, E2, E3, E4 en H1, in combinatie met de vaardigheden uit de subdomeinen A1, A2 en A3.

De CEVO stelt het aantal en de tijdsduur van de zittingen van het centraal examen vast.

De CEVO maakt indien nodig een specificatie bekend van de examenstof van het centraal examen.

## Het schoolexamen

Het schoolexamen heeft betrekking op domein A en:

- de domeinen B en D;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: een of meer van de overige domeinen en subdomeinen waarop het centraal examen betrekking heeft;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: andere vakonderdelen, die per kandidaat kunnen verschillen.

## De examenstof

Domein A: Vaardigheden

### Subdomein A1: Informatievaardigheden

1. De kandidaat kan, mede met behulp van ICT, informatie verwerven, selecteren, verwerken, beoordelen en presenteren.

### Subdomein A2: Onderzoeksvaardigheden

2. De kandidaat kan een gegeven probleemsituatie inventariseren, vertalen in een wiskundig model, binnen dat model wiskundige oplostechieken hanteren en de gevonden oplossingen betekenis geven in de context.

### Subdomein A3: Technisch-instrumentele vaardigheden

3. De kandidaat kan bij raadplegen, verkennen en presenteren van wiskundige informatie en bij uitvoeren van wiskundige bewerkingen en redeneringen gebruik maken van toepassingen van ICT.

### Subdomein A4: Oriëntatie op studie en beroep

4. De kandidaat kan een verband leggen tussen zijn wiskundige kennis, vaardigheden en belangstelling en de rol van wiskunde in vervolgstudies en de praktijk van verschillende beroepen.

### Subdomein A5: Algebraïsche vaardigheden

5. De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige en algebraïsche vaardigheden en formules, heeft daar inzicht in en kan de bewerkingen uitvoeren met, maar ook zonder, gebruik van ICT-middelen zoals de grafische rekenmachine.

## Domein B: Veranderingen

### **Subdomein B1: Veranderingen**

6. De kandidaat kan het veranderingsgedrag van een grafiek, tabel of functie onder meer door middel van toenamediagrammen en differentiequotiënten beschrijven en differentiequotiënten berekenen en interpreteren, ook vanuit een contextprobleem.

## Domein D: Ruimte meetkunde 1

### **Subdomein D1: Fragmenttekeningen van ruimtelijke objecten**

7. De kandidaat kan van een ruimtelijk object aanzichten, uitslagen en vlakke doorsneden tekenen, interpreteren, er berekeningen aan uitvoeren en uit een serie parallelle doorsneden conclusies trekken over vorm en inhoud van zo'n object.

### **Subdomein D2: Oppervlakte en inhoud**

8. De kandidaat kan de oppervlakte van vlakke en ruimtelijke figuren berekenen, van ruimtelijke figuren de inhoud berekenen en schatten en het effect van schaalvergroting op zowel inhoud als oppervlakte beargumenteren.

## Domein E: Toegepaste analyse 1

### **Subdomein E1: Functies en grafieken**

9. De kandidaat kan standaardfuncties (machtsfuncties, exponentiële en logaritmische functies en goniometrische functies) hanteren, interpreteren binnen een context, de grafieken beschrijven en in een functievoorschrift vastleggen, eenvoudige vergelijkingen oplossen en werken met eenvoudige transformaties.

### **Subdomein E2: Vergelijkingen en ongelijkheden**

10. De kandidaat kan eenvoudige vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels van twee lineaire vergelijkingen oplossen met behulp van een algoritme, in voorkomende gevallen grafisch oplossen of numeriek benaderen en de oplossingen interpreteren in relatie met de context.

### **Subdomein E3: Afgeleide functies**

11. De kandidaat kan de lokale verandering van een functie benaderen zowel met een differentiaalquotiënt als numeriek-grafisch en de afgeleide functie van een polynoom en van eenvoudige goniometrische functies bepalen en gebruiken zowel voor bestudering van het veranderingsgedrag van een functie als voor het benaderen van een functiewaarde.

### **Subdomein E4: Periodieke functies**

12. De kandidaat kan periodieke verschijnselen beschrijven door middel van een goniometrische functie, de bijbehorende sinusoïde tekenen en kenmerkende eigenschappen ervan benoemen en alle oplossingen van een eenvoudige goniometrische vergelijking op een gegeven interval vinden.

## Domein H: Toegepaste analyse 2

### **Subdomein H1: Afgeleide functies 2**

13. De kandidaat kan voor het bepalen van de afgeleide functie en de interpretatie daarvan binnen een context gebruik maken van de som-, verschil- en productregel en van de kettingregel bij enkelvoudig samengestelde functies.