

# **Wiskunde B VWO**

Syllabus centraal examen 2010



Oktober 2008

**Verantwoording:**

© 2008 Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven vwo, havo, vmbo, Utrecht

Alle rechten voorbehouden. Alles uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enige andere manier zonder voorafgaande toestemming van de uitgever.

CEVO commissie herziening examenprogramma 2008 wiskunde B vwo:

M. Kindt (Freudenthal Instituut), voorzitter

M. Kollenveld (docent, vaksectie CEVO)

K. Rijke (docent)

A. Sterk (docent)

P. Kop (docent, vaksectie CEVO)

J. Krüger (SLO), secretaris

H. van der Kooij (CEVO)

K. Lagerwaard (Cito)

# Inhoud

<b>Voorwoord</b>	<b>4</b>
<b>1. Inleiding</b>	<b>5</b>
<b>2. Verdeling examinering CE/SE</b>	<b>6</b>
<b>3. Specificatie van de globale eindtermen voor het CE</b>	<b>7</b>
Domein Bg: Functies en grafieken	9
Domein Cg: Discrete analyse	9
Domein Bb: Differentiaal- en integraalrekening	10
Domein Db: Goniometrische functies	11
Domein Gb: Voortgezette meetkunde	11
<b>4. Algebra: specifieke en algemene vaardigheden</b>	<b>12</b>
<b>5. Het centraal examen</b>	<b>19</b>
Zittingen centraal examen	19
Vakspecifieke regels correctievoorschrift	19
Hulpmiddelen	19
<b>Bijlage 1. Examenprogramma Wiskunde B vwo</b>	<b>20</b>
<b>Bijlage 2. Algebra in het vwo; het onderscheid tussen A, B en C</b>	<b>22</b>
<b>Bijlage 3. Lijst van formules en verwijzingen naar definities/stellingen die in het examen wordt opgenomen</b>	<b>25</b>
<b>Bijlage 4. Lijst van definities/stellingen behorend bij de verwijzingen in bijlage 3</b>	<b>26</b>

## Voorwoord

Examenprogramma's veranderen van opzet. De minister stelt een examenprogramma op hoofdlijnen vast en wijst in het examenprogramma Domeinen en subdomeinen aan, waarover het centraal examen zich uitstrekt.

De CEVO geeft in een syllabus een beschrijving van en toelichting op de exameneisen voor een centraal examen (CE), en geeft verdere informatie over het centraal examen. Dat kan gaan over een of meer van de volgende onderwerpen:

- toegestane hulpmiddelen,
- specificaties van examenstof,
- voorbeeldopgaven,
- bijzondere vormen van examinering (computerexamens),
- toelichting op de vraagstelling,
- begrippenlijsten,
- bekend veronderstelde voorkennis uit de onderbouw,
- bekend veronderstelde onderdelen van Domeinen die verplicht zijn op het schoolexamen.

Ten aanzien van de specificaties is nog het volgende op te merken. De functie ervan is een leraar in staat te stellen zich een goed beeld te vormen van wat in het centraal examen wel en niet gevraagd kan worden. Naar hun aard zijn ze dus niet een volledig gesloten en afgegrensde beschrijving van alles wat op een examen zou kunnen voorkomen. Het is mogelijk, al zal dat maar in beperkte mate voorkomen, dat op een CE ook iets aan de orde komt dat niet met zo veel woorden in deze syllabus staat, maar dat naar het algemeen gevoelen daarvan in het verlengde ligt.

Een syllabus is zodoende een hulpmiddel voor degenen die anderen of zichzelf op een centraal examen voorbereiden. Een syllabus kan ook behulpzaam zijn voor de producenten van leermiddelen en voor nascholers.

De syllabus is niet van belang voor het schoolexamen. Daarvoor bestaat een handreiking die door de SLO geproduceerd wordt, en die in deze uitgave niet is opgenomen. Volstaan wordt hier met de opmerking dat alle Domeinen van het CE ook in het schoolexamen getoetst mogen worden, en dat dat niet op dezelfde wijze behoeft te gebeuren als op het centraal examen. Hetzelfde domein kan dus in de Handreiking van de SLO op een andere, op het schoolexamen toegesneden wijze, worden uitgewerkt dan in deze syllabus van de CEVO is gedaan.

Deze syllabus geldt voor het centraal examen vwo van 2010. Dat wil zeggen voor leerlingen die in 2007 in leerjaar 4 zijn ingestroomd in een iets aangepaste profielstructuur. Voor 2011 wordt een volgende syllabus vastgesteld die vermoedelijk vrijwel identiek aan deze syllabus zal zijn.

In uitzonderingsgevallen kan een syllabus na publicatie nog worden aangepast, bij voorbeeld als een in de syllabus beschreven situatie feitelijk veranderd is. De aan een centraal examen voorafgaande Septembermededeling is dan het moment waarop dergelijke veranderingen bekend worden gemaakt. Kijkt u voor alle zekerheid in september 2009 op Het Examenblad, [www.examenblad.nl](http://www.examenblad.nl).

Deze syllabus geldt niet voor de examens vwo wiskunde B1 en B1,2. Voor kandidaten die in 2010 (en 2011) het examen volgens het programma van 1998 afleggen is er een afzonderlijk bezemexamen. De syllabus is ontworpen door een commissie ad-hoc van de CEVO en in hoofdzaak geschreven door medewerkers van SLO-en Cito.

Een eerder concept van de syllabus is in februari 2005 ter inzage gelegd op [www.cevo.nl](http://www.cevo.nl), en is voor advies toegezonden aan de vakinhoudelijke vereniging, de VSNU, de HBO-raad, het Cito en de CEVO-vaksectie. Op grond van de ontvangen reacties en adviezen is de tekst vastgesteld, die u hierbij aantreft.

Voor opmerkingen over deze tekst houdt de CEVO zich steeds aanbevolen. U kunt die zenden aan [info@cevo.nl](mailto:info@cevo.nl) of aan CEVO, postbus 8128, 3503 RC Utrecht.

De voorzitter van de CEVO,  
drs H.W.Laan

# 1. Inleiding

De herstructurering van de Tweede Fase 2007 geeft aanleiding tot herziening van alle wiskundeprogramma's. Het voor u liggende programma is gebaseerd op het programma wiskunde B1,2 vwo dat is ingevoerd in 1998.

Een commissie vernieuwing wiskundeonderwijs werkt aan nieuwe examenprogramma's voor wiskunde. De invoering van nieuwe programma's is niet voor 2013 te verwachten.

## *. De plaats van het vak in de tweede fase vanaf 2007*

Wiskunde B is profielvak in het profiel NT (Natuur en Techniek) naast de vakken natuurkunde en scheikunde.

Desgewenst mag in de twee profielen EM (Economie en Maatschappij) en NG (Natuur en Gezondheid) in plaats van wiskunde A het vak wiskunde B als profielvak worden gekozen.

In het profiel CM (Cultuur en maatschappij) mag het profielvak wiskunde C worden vervangen door wiskunde A (of wiskunde B).

## *. De omvang van het programma*

Het vak wiskunde B voor vwo heeft een omvang van 600 studielasturen. Het komt in de plaats van het huidige profielvak wiskunde B1,2 in het profiel NT. De studielast van wiskunde B1,2 was 760 uur.

## *. Een korte toelichting bij de herziening van het programma*

Een van de uitgangspunten van deze herzieningsoperatie was dat het nieuwe programma is opgebouwd uit bestaande (sub)domeinen. Er mag dus geen nieuwe leerstof worden toegevoegd. Vergeleken met het huidige programma wiskunde B1,2 moest er, gelet op het kleinere aantal studielasturen, een aanzienlijke reductie van het programma plaatsvinden. Daardoor is er geen plaats meer voor onderwerpen als combinatoriek en kansrekening, statistiek, continue dynamische modellen en voortgezette analyse. Voorts is een deel van het meetkundeprogramma geschrapt.

Er zal in de komende jaren een profielkeuzevak wiskunde D voor het profiel NT worden ontwikkeld. De leerlingen in het profiel NT mogen dan één profielkeuzevak kiezen uit het viertal informatica, biologie, Natuur, Leven&Technologie en wiskunde D.

## *. De leerstofdomeinen voor CE en SE*

Het examenprogramma bestaat uit domeinen en subdomeinen. In onderstaand overzicht staan voor de domeinen nog de lettercodes die gebruikt werden in het examenprogramma wiskunde B vwo dat in mei 1998 is gepubliceerd.

Het domein A Vaardigheden neemt een bijzondere positie in. Informatie-, onderzoeks- en technisch-instrumentele vaardigheden komen zowel in CE als SE aan bod, maar niet steeds op precies dezelfde manier. Subdomein A4 zal niet in het centraal examen worden getoetst.

Subdomein A5 is nieuw en geeft aan dat algebraïsche vaardigheden ook onafhankelijk van de grafische rekenmachine (GR) of andere ICT-middelen moeten worden beheerst. Specificaties van deze eisen worden in hoofdstuk 4 beschreven.

## 2. Verdeling examinering CE/SE

### . Het centraal examen

Het centraal examen heeft betrekking op de subdomeinen A5, Bg1, Bg2, Cg1, Bb1, Bb2, Bb3, Db1, Gb1 en Gb2, in combinatie met de vaardigheden uit subdomeinen A1, A2 en A3.

De CEVO stelt het aantal en de tijdsduur van de zittingen van het centraal examen vast.

### . Het schoolexamen

Het schoolexamen heeft betrekking op domein A in combinatie met:

- de domeinen Bb, Db en Gb;
- het domein F, met dien verstande dat deze onderwerpen per kandidaat kunnen verschillen;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: een of meer van de overige domeinen of subdomeinen;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: andere vakonderdelen, die per kandidaat kunnen verschillen.

domein	subdomein	in CE	moet in SE	mag in SE
A Vaardigheden	A1: Informatievaardigheden	X	X	
	A2: Onderzoeksvaardigheden	X	X	
	A3: Technisch-instrumentele vaardigheden	X	X	
	A4: Oriëntatie op studie en beroep		X	
	A5: Algebraïsche vaardigheden	X	X	
Bg Functies en grafieken	Bg1: Standaardfuncties	X		X
	Bg2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden	X		X
Cg Discrete analyse	Cg1: Veranderingen	X		X
Bb Differentiaal- en integraalrekening	Bb1: Afgeleide functies	X	X	
	Bb2: Algebraïsche technieken	X	X	
	Bb3: Integraalrekening	X	X	
Db Goniometrische functies	Db1: Goniometrische functies	X	X	
Gb Voortgezette meetkunde	Gb1: Oriëntatie op bewijzen	X	X	
	Gb2: Constructie en bewijzen in de vlakke meetkunde	X	X	
F Keuze-onderwerpen			X	

Een globale formulering van eindtermen van alle subdomeinen (het examenprogramma) staat in de bijlage 1.

Van de (sub)domeinen die in het centraal examen worden getoetst staat een gedetailleerder beschrijving in hoofdstuk 3.

Een nadere uitwerking van voor wiskunde B relevante algebraïsche specifieke en algemene vaardigheden is te vinden in hoofdstuk 4.

### 3. Specificatie van de globale eindtermen voor het CE

Vooraf

#### *. hulpmiddelen*

Bij het centraal schriftelijk eindexamen mogen de kandidaten gebruik maken van een grafische rekenmachine. De CEVO publiceert jaarlijks een lijst van toegestane grafische rekenmachines. Ook is een beperkte lijst van formules en verwijzingen naar definities en stellingen beschikbaar. Deze lijst wordt opgenomen op bladzijde 2 in het examen. De lijst is in deze syllabus vermeld in bijlage 3.

#### *. significantie*

Er wordt van kandidaten bij wiskunde B niet verlangd dat zij kennis hebben van regels voor het aantal significante cijfers. Daarom zal bij vragen op het centraal examen worden aangegeven in welke nauwkeurigheid een antwoord dient te worden gegeven of er zal genoeg worden genomen met antwoorden in uiteenlopende aantallen decimalen.

#### *. bekend veronderstelde basiskennis*

Het examenprogramma bouwt voort op veronderstelde basiskennis die in de onderbouw van vwo is verworven. Zo wordt er bijvoorbeeld van uitgegaan dat de kandidaat berekeningen kan uitvoeren met en zonder rekenmachine. Berekeningen uitvoeren met behulp van de stelling van Pythagoras is een ander voorbeeld. Er wordt ook van uitgegaan dat de kandidaat kennis heeft van het metrieke stelsel. Op dit punt is er geen enkel verschil tussen de huidige examenprogramma's wiskunde en het nieuwe programma wiskunde B.

#### *. algebraïsche vaardigheden*

Hoewel de grafische rekenmachine een krachtig hulpmiddel is, ook bij het oplossen van vergelijkingen, dient de kandidaat ook algebraïsche vaardigheden te beheersen. Het gaat hier om het opstellen van formules op basis van in tekst, tabel of formule verstrekte gegevens, het omvormen van formules en om het exact oplossen van vergelijkingen. Zie subdomein A5 en een uitgebreide toelichting daarop in hoofdstuk 4.

#### *. ICT*

Zolang het centraal examen schriftelijk is, wordt met ICT in het centraal examen de grafische rekenmachine bedoeld.

## **Domein A: Vaardigheden**

### **Subdomein A1: Informatievaardigheden**

1. De kandidaat kan, mede met behulp van ICT, informatie verwerven, selecteren, verwerken, beoordelen en presenteren.

#### **Specificatie**

De kandidaat kan

- 1.1 artikelen of berichten uit (nieuws)media of vakliteratuur waarin wiskundige presentaties, redeneringen of berekeningen voorkomen, kritisch analyseren.
- 1.2 informatie verwerven en selecteren uit schriftelijke, mondelinge en audiovisuele bronnen, mede met behulp van ICT. Waar het een schriftelijk eindexamen betreft, beperkt deze eindterm zich tot het selecteren van informatie uit een gegeven context.
- 1.3 benodigde gegevens halen en interpreteren uit grafieken, tekeningen, simulaties, schema's, diagrammen en tabellen, mede met behulp van ICT.
- 1.4 gegevens weergeven in grafieken, tekeningen, schema's, diagrammen en tabellen, mede met behulp van ICT.
- 1.5 hoofd- en bijzaken onderscheiden.
- 1.6 feiten met bronnen verantwoorden.
- 1.7 informatie analyseren, schematiseren en structureren.
- 1.8 de betrouwbaarheid beoordelen van informatie en de waarde daarvan vaststellen voor het op te lossen probleem of te maken ontwerp.

### **Subdomein A2: Onderzoeksvaardigheden**

2. De kandidaat kan een gegeven probleemsituatie inventariseren, vertalen in een wiskundig model, binnen dat model wiskundige oplostechieken hanteren en de gevonden oplossingen betekenis geven in de context.

#### **Specificatie**

De kandidaat kan

- 2.1 logische relaties tussen gegevens, beweringen en resultaten aanbrengen en beoordelen en relevante gegevens scheiden van minder relevante gegevens.
- 2.2 gegevens met elkaar en met de probleemstelling in verband brengen, op grond daarvan een passende aanpak kiezen en deze zo mogelijk opsplitsen in deeltaken.
- 2.3 in een tekst verstrekte gegevens doelmatig weergeven in een geschikte wiskundige representatie (model).
- 2.4 vaststellen of een gekozen model voldoet en, indien nodig, een bijstelling hiervan suggereren.
- 2.5 vaststellen of er aanvullende gegevens nodig zijn en zo ja, welke.
- 2.6 onderzoeken in hoeverre het model bijgesteld moet worden ten gevolge van wijzigingen in de gegevens.
- 2.7 een bij het model passende wiskundige oplossingsmethode correct uitvoeren.
- 2.8 resultaten betekenis geven in de context en binnen die context kritisch analyseren.
- 2.9 de nauwkeurigheid van de gegevens of werkwijzen betrekken bij de beoordeling van het eindresultaat.
- 2.10 reflecteren op de gemaakte keuzen voor representatie, werkwijze, oplossingsproces en resultaten en deze onder woorden brengen.

### **Subdomein A3: Technisch-instrumentele vaardigheden**

3. De kandidaat kan bij raadplegen, verkennen en presenteren van wiskundige informatie en bij uitvoeren van wiskundige bewerkingen en redeneringen gebruik maken van toepassingen van ICT

### **Subdomein A5: Algebraïsche vaardigheden**

5. De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige en algebraïsche vaardigheden en formules, heeft daar inzicht in en kan de bewerkingen uitvoeren met, maar ook zonder, gebruik van ICT-middelen zoals de grafische rekenmachine.

#### **Specificatie**

De kaders voor dit subdomein worden geschetst in hoofdstuk 4.

## Domein Bg: Functies en grafieken

### Subdomein Bg1: Standaardfuncties

6. De kandidaat kan grafieken tekenen en herkennen van machtsfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies en goniometrische functies en van die verschillende typen functies de karakteristieke eigenschappen benoemen.

#### Specificatie

De kandidaat kan

- 6.1 grafieken tekenen van machtsfuncties met rationale exponenten en daarbij de begrippen domein, bereik, stijgen, dalen, symmetrie en asymptotisch gedrag hanteren.
- 6.2 grafieken tekenen van exponentiële functies van het type  $f(x) = a^x$  en hun inverse functies  $f(x) = {}^a\log x$  en daarbij de begrippen domein, bereik, stijgen, dalen en asymptotisch gedrag hanteren.
- 6.3 grafieken tekenen van de goniometrische functies  $f(x) = \sin x$  en  $f(x) = \cos x$  en daarbij de begrippen radiaal, periode, amplitude, domein, bereik, stijgen, dalen en symmetrie hanteren<sup>1</sup>.

### Subdomein Bg2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden

7. De kandidaat kan functievoorschriften opstellen, bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen en vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met behulp van numerieke, grafische en algebraïsche methoden.

#### Specificatie

De kandidaat kan

- 7.1 een in de context beschreven samenhang vertalen in een functievoorschrift.
- 7.2 op grafieken transformaties uitvoeren als verschuiven en rekken en de samenhang met de bijbehorende verandering van het functievoorschrift beschrijven.
- 7.3 functies combineren (optellen, aftrekken, schakelen) en de samenhang met de bijbehorende grafieken beschrijven.
- 7.4 een tweedegraadspolynoom in één variabele ontbinden in lineaire factoren.
- 7.5 een algoritme gebruiken voor het oplossen van een tweedegraadsvergelijking.
- 7.6 vergelijkingen oplossen met numerieke, grafische of elementair-algebraïsche methoden.
- 7.7 de rekenregels voor machten en logaritmen (inclusief grondtalverandering) gebruiken.
- 7.8 gebruik maken van logaritmische schaalverdelingen.
- 7.9 ongelijkheden oplossen met de grafische methode.
- 7.10 het begrip absolute waarde hanteren.

## Domein Cg: Discrete analyse

### Subdomein Cg1: Veranderingen

8. De kandidaat kan het veranderingsgedrag van grafieken en functies relateren aan differentiequotienten, toenamediagrammen, hellinggrafieken en contexten.

#### Specificatie

De kandidaat kan

- 8.1 vaststellen op welke intervallen er sprake is van een constant, een stijgend of een dalend verloop van de grafiek van een functie.
- 8.2 vaststellen of een stijging/daling toenemend of afnemend is.
- 8.3 vaststellen of er minima en maxima zijn en uit een grafiek aflezen hoe groot die zijn.
- 8.4 veranderingen beschrijven met behulp van differenties, bijvoorbeeld  $\Delta x$ .
- 8.5 bij een gegeven functie of grafiek een toenamediagram tekenen en daaruit conclusies trekken.
- 8.6 veranderingen beschrijven en vergelijken met behulp van differentiequotienten.
- 8.7 differentiequotienten berekenen als een functie gegeven is door een formule of grafiek.
- 8.8 differentiequotienten interpreteren als maat voor gemiddelde verandering op een interval en als helling van een koorde.
- 8.9 bij afnemende stapgrootte differentiequotienten interpreteren als benadering van de helling (steilheid) van de grafiek in een bepaald punt.
- 8.10 van een gegeven grafiek de bijbehorende hellinggrafiek beschrijven en met een computer of GR numeriek benaderen.
- 8.11 uit een gegeven hellinggrafiek het verloop van de oorspronkelijke grafiek afleiden.
- 8.12 relaties leggen tussen contexten, bijbehorende formules of functies en veranderingsgedrag.

---

<sup>1</sup>  $\sin x$  en  $\cos x$  worden tot de standaardfuncties gerekend;  $\tan x$  niet.

## Domein Bb: Differentiaal- en integraalrekening

### Subdomein Bb1: Afgeleide functies

9. De kandidaat kan het differentiaalquotiënt en de eerste en tweede afgeleide gebruiken om een functie te onderzoeken en om een contextprobleem op te lossen

#### Specificatie

De kandidaat kan

- 9.1 de helling van een grafiek in een punt numeriek-grafisch benaderen als de functie gegeven is door een formule.
- 9.2 het differentiaalquotiënt gebruiken als maat voor de lokale verandering van een functie en als richtingscoëfficiënt van de raaklijn.
- 9.3 het differentiaalquotiënt gebruiken om een functie lokaal lineair te benaderen.
- 9.4 het verband aangeven tussen de afgeleide van een functie  $f$  en van een functie  $g$  waarvan de grafiek door verschuiven of rekken uit die van  $f$  is ontstaan.
- 9.5 de afgeleide functie gebruiken voor het bestuderen van stijging of daling van een functie.
- 9.6 de afgeleide gebruiken bij het vinden van extremen van een functie of het verifiëren van langs numeriek-grafische weg gevonden extremen.
- 9.7 de tweede afgeleide gebruiken om toe- of afname van stijging of daling te onderscheiden.
- 9.8 de tweede afgeleide gebruiken bij het vinden van buigpunten van een grafiek of het verifiëren van langs numeriek-grafische weg gevonden buigpunten.
- 9.9 de diverse notaties voor de afgeleide en de tweede afgeleide functie  $f'(x)$ ,  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d}{dx}f(x)$ ,  $\frac{dK}{dq}$ ,  $\frac{ds}{dt}$ ,  $f''(x)$  herkennen en gebruiken.
- 9.10 relaties leggen tussen begrippen in contexten, met name de begrippen snelheid en versnelling, de eerste en/of tweede afgeleide van een functie en de grafieken van de eerste en/of tweede afgeleide.
- 9.11 een optimalisatieprobleem vertalen in een model waarbij een functie van één variabele optreedt en dit probleem vervolgens numeriek-grafisch of met behulp van de afgeleide van deze functie oplossen.

### Subdomein Bb2: Algebraïsche technieken

10. De kandidaat kan afgeleide functies bepalen met behulp van regels voor het differentiëren en algebraïsche technieken hanteren.

#### Specificatie

De kandidaat kan

- 10.1 algebraïsche uitdrukkingen omwerken.
- 10.2 de afgeleide bepalen van standaardfuncties.
- 10.3 bij het bepalen van de afgeleide van exponentiële en logaritmische functies het getal  $e$  en de natuurlijke logaritme gebruiken.
- 10.4 voor het bepalen van de afgeleide functie de som-, verschil-, product-, quotiënt- en/of kettingregel gebruiken.

### Subdomein Bb3: Integraalrekening

11. De kandidaat kan in geschikte toepassingen een bepaalde integraal opstellen en exact berekenen, en met behulp van ict benaderen.

#### Specificatie

De kandidaat kan

- 11.1 bij daarvoor geëigende toepassingen een bepaalde integraal opstellen.
- 11.2 met behulp van de grafische rekenmachine een Riemansom berekenen als benadering van een integraal
- 11.3 de notatie  $\int_a^b f(t)dt$  herkennen en gebruiken.
- 11.4 een integraal exact berekenen in het geval de integrand
  - a. de gedaante  $f(x) + c$ ,  $f(x + c)$ ,  $c \cdot f(x)$  of  $f(c \cdot x)$  heeft, waarbij  $f$  een machtsfunctie, een exponentiële functie, of de functie sinus of cosinus is.
  - b. de som van twee of meer functies zoals bedoeld in a. is.
- 11.5 een integraal gebruiken bij de berekening van lengte, oppervlakte, inhoud, afgelegde weg en zwaartepunt.

## Domein Db: Goniometrische functies

### Subdomein Db1: Goniometrische functies

12. De kandidaat kan bij periodieke verschijnselen, met name trillingspatronen en harmonische bewegingen, formules opstellen, herleiden en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen en vergelijkingen oplossen.

#### Specificatie

De kandidaat kan

- 12.1 de eenparige cirkelbeweging en de harmonische beweging in verband brengen met de functies sinus en cosinus.
- 12.2 gebruik maken van de begrippen amplitude, evenwichtstand, faseverschil en frequentie bij het tekenen van een sinusoïde of het beschrijven van een periodiek verschijnsel.
- 12.3 bij een gegeven sinusoïde een passende formule opstellen.
- 12.4 vergelijkingen oplossen van het type  $\sin a = \sin b$  en  $\cos a = \cos b$  waarbij  $a$  en  $b$  lineaire functies van  $x$  zijn en hierbij de periodiciteit gebruiken voor het vinden van alle oplossingen.
- 12.5 de formules waarin  $\sin(t+\pi)$ ,  $\cos(t+\pi)$ ,  $\sin(t+\pi/2)$ ,  $\cos(t+\pi/2)$ ,  $\sin(-t)$ ,  $\cos(-t)$ ,  $\sin(2t)$  en  $\cos(2t)$  worden uitgedrukt in  $\sin t$  en/of  $\cos t$ , gebruiken bij het herleiden van formules en het oplossen van vergelijkingen.
- 12.6 de formules  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$  en  $\frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$  gebruiken bij het herleiden van formules.
- 12.7 de formules voor  $\sin(t \pm u)$ ,  $\cos(t \pm u)$ ,  $\sin t \pm \sin u$ ,  $\cos t \pm \cos u$  gebruiken bij het verklaren van samengestelde trillingspatronen en bij het herleiden van formules.
- 12.8 de afgeleiden bepalen van de functies sinus, cosinus en tangens.
- 12.9 parametervoorstellingen gebruiken bij het bestuderen van figuren van Lissajous.

## Domein Gb: Voortgezette meetkunde

### Subdomein Gb1: Oriëntatie op bewijzen

13. De kandidaat kan definities, vermoedens, stellingen en bewijzen onderscheiden, meetkundige situaties exploreren, een vermoeden of te bewijzen stelling formuleren en bewijzen of weerleggen.

#### Specificatie:

De kandidaat kan

- 13.1 het verschil aangeven tussen een definitie en een stelling.
- 13.2 het verschil aangeven tussen een vermoeden en een stelling.
- 13.3 in relevante gevallen het verschil tussen een stelling en haar omkering herkennen en beoordelen welke van de twee bij een bepaald bewijs een rol kan spelen.
- 13.4 de structuur van een gegeven bewijs doorgronden.
- 13.5 verschillende technieken hanteren bij het geven van een bewijs of het weerleggen van een vermoeden, zoals:
- het redeneren vanuit het ongerijmde,
  - het gebruik maken van meetkundige plaatsen,
  - het onderzoeken en onderscheiden van verschillende gevallen,
  - het geven van een tegenvoorbeeld.
- 13.6 meetkundige situaties exploreren en een vermoeden in de vorm van een (te bewijzen) stelling formuleren.

### Subdomein Gb2: Constructie en bewijzen in de vlakke meetkunde

14. De kandidaat kan constructies uitvoeren en bewijzen geven.

#### Specificatie

De kandidaat kan

- 14.1 bewijzen geven waarbij gebruik gemaakt wordt van eigenschappen van rechte lijnen, cirkels, driehoeken en vierhoeken en waarbij afstanden, hoeken en onderlinge ligging een rol spelen.
- 14.2 binnen een concrete probleemsituatie methoden uit de vlakke meetkunde gebruiken.
- 14.3 aangeven wat de afstand van een punt tot een gebied is en daarbij gebruik maken van cirkels rond het gegeven punt en/of de begrippen normaal en voetpunt.
- 14.4 middelloodlijnen, bissectrices, cirkels, parabolen als meetkundige plaatsen herkennen en gebruiken.
- 14.5 in eenvoudige gevallen de meetkundige plaats van punten vinden die gelijke afstand tot twee gegeven gebieden hebben.

## 4. Algebra: specifieke en algemene vaardigheden

In dit hoofdstuk worden de algebra-eisen beschreven die aan examenkandidaten wiskunde B worden gesteld (subdomein A5). Daarbij wordt voornamelijk ingegaan op de vaardigheden die passen bij het domein Bg. Niet aan de orde komen de vaardigheden die horen bij het differentiëren en het primitiveren, zoals ze zijn beschreven in domein Bb (eindtermen 10.2, 10.3, 10.4 en 11.4). Het kunnen toepassen van de regels bij het differentiëren en primitiveren blijft onverkort gehandhaafd. Wel wordt aandacht besteed (in de voorbeelden) aan de algebraïsche vervolgvactiteiten na het differentiëren van bijvoorbeeld een product- of een kettingfunctie.

De eisen die aan de wiskunde B-kandidaten worden gesteld ten aanzien van algebra zijn divers. Zo moet een kandidaat in staat zijn algebra te gebruiken bij het modelleren en oplossen van een in een context gesteld probleem, maar hij zal ook in staat moeten zijn om een meer abstracte opgave op te lossen of een algebraïsch bewijs te leveren.

In algemene zin geldt dat de GR vooral wordt gebruikt in die gevallen waarin een algebraïsche oplossing op het kennisniveau van de wiskunde B leerling niet goed mogelijk is. Een kandidaat moet dan ook kunnen beoordelen of een vraag kan worden beantwoord met een algebraïsche aanpak of dat de GR moet worden ingezet om een benaderende oplossing te vinden.

In de vraagstelling van het examen kan dit worden aangeduid met een indicatie dat een exact antwoord wordt verwacht.

In het volgende wordt het algebraïsch handelen onderscheiden in specifieke vaardigheden (kennis en manipulatievaardigheden) en algemene vaardigheden (strategieën hanteren die tot een oplossing leiden; een stappenplan ontwikkelen; het vertonen van inzicht in de structuur van een probleem). Bij de opsplitsing in specifieke- en algemene vaardigheden is onderstaande lijst te maken. De lijst heeft niet de pretentie volledig dekkend te zijn, maar moet meer als een goede indicatie worden gezien.

Vervolgens worden bij een aantal categorieën korte voorbeelden gegeven waaruit valt af te lezen welke vaardigheden een kandidaat moet kunnen tonen.

De algemene vaardigheden worden niet van korte voorbeelden voorzien, omdat het daarbij gaat om een samenhangend geheel van

- begrijpen wat er wordt gevraagd,
- een strategie (stappenplan) bepalen en die (dat) kunnen uitvoeren.

Voorbeelden van zulke koppelingen van algemene vaardigheden en specifieke vaardigheden worden wel gegeven in de serie opgaven op examenniveau. Een aantal van deze opgaven wordt via deelvragen naar een eindvraag geleid, maar er zijn ook enkele zogenaamde *enkelvoudige opgaven* opgenomen. Bij deze opgaven wordt van een kandidaat gevraagd het hele oplossingspad zelf te doorlopen. Het betreft de voorbeelden 4, 5, 6, 7 en 10.

Zulke opgaven (variërend in moeilijkheidsgraad) zullen zeker voorkomen in de examens.

Bij de onderstaande specifieke vaardigheden-opsomming geldt zeker dat een deel (wellicht alleen in zijn grondvorm) bekend verondersteld moet worden vanuit de onderbouw. Denk bijvoorbeeld maar aan de voorrangsregels en het werken met haakjes, eenvoudige breukvormen en wortels.

Op de plaats van  $A$ ,  $B$  en  $C$  kunnen lineaire combinaties staan van standaardfuncties, zoals  $ax+b$ ,

$$\frac{a}{x} + b, 1 + 2 \cdot \sin x \text{ en } 2 - e^x$$

## De indeling in specifieke- en algemene vaardigheden

<b>Specifieke vaardigheden</b>	
<b>A. Breukvormen</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>\frac{A}{B} + C = \frac{A+BC}{B}</math></li> <li><math>\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD}</math></li> <li><math>A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C} = \frac{A}{C} \cdot B = A \cdot B \cdot \frac{1}{C}</math></li> <li><math>\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}</math></li> <li><math>\frac{A}{\frac{B}{C}} = A \cdot \frac{C}{B} = \frac{A \cdot C}{B}</math></li> </ol>
<b>B. Wortelvormen</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>\sqrt{A} = B \rightarrow A = B^2 \quad (B \geq 0)</math></li> <li><math>\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \quad (A, B \geq 0)</math></li> <li><math>\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (A \geq 0, B &gt; 0)</math></li> </ol>
<b>C. Bijzondere producten</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2</math></li> <li><math>A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)</math></li> </ol>
<b>D. Exponenten en logaritmen</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>regels voor machten kennen</li> <li>regels voor logaritmen kennen</li> </ol>
<b>E. Goniometrie</b>	voor formules: zie domein Db
<b>F. 'Herleidingen' uitvoeren aan de hand van de elementen genoemd bij A - E</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>via substitutie van getallen</li> <li>via substitutie van expressies</li> <li>via reductie van expressies</li> <li>via het omwerken van formules</li> </ol>
<b>G. Vergelijkingen oplossen met behulp van algemene vormen</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0</math> of <math>B = 0</math></li> <li><math>A \cdot B = A \cdot C \Leftrightarrow A = 0</math> of <math>B = C</math></li> <li><math>\frac{A}{B} = C \Leftrightarrow A = B \cdot C</math> en <math>B \neq 0</math></li> <li><math>\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \cdot D = B \cdot C</math> en <math>B, D \neq 0</math></li> <li><math>A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = B</math> of <math>A = -B</math></li> </ol>
<b>H. Vergelijkingen oplossen met behulp van standaardfuncties en transformaties</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>f(bx + c) + d = e</math></li> <li><math>f(A) = f(B)</math></li> <li>lijn- en puntsymmetrie kunnen hanteren: <ul style="list-style-type: none"> <li>* <math>f(a + b) = f(a - b)</math> bij lijnsymmetrie in <math>x = a</math></li> <li>* <math>f(a + b) = -f(a - b)</math> bij puntsymmetrie in <math>(a, 0)</math></li> </ul> </li> </ol>
<b>I. Vergelijkingen met polynomen oplossen via standaardalgoritmen</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>eerstegraadsvergelijkingen</li> <li>tweedegraadsvergelijkingen</li> <li>eerste- of tweedegraadsvergelijkingen met parameter(s)</li> </ol>
<b>K. Vergelijkingen van het type <math>f(x) = g(x)</math></b>	indien mogelijk exact
<b>L. Ongelijkheden van het type <math>f(x) \geq g(x)</math></b>	indien mogelijk $f(x) = g(x)$ exact en verder grafisch

<b>Algemene vaardigheden</b>	
<b>M. Kwalitatief redeneren</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Kwalitatief redeneren aan de hand van een gegeven expressie (zoals: getransformeerde standaardfuncties als zodanig herkennen en daarmee vanuit de kenmerkende karakteristieken redeneren ipv. rekenen)</li> <li>2. gedrag van een expressie (functie) globaal (uitzoomen) en lokaal (inzoomen) kwalitatief beschrijven</li> <li>3. het doorzien van de structuur van een formule</li> </ol>
<b>N. Substitutie en reductie</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. expressies invullen voor variabelen en daarmee verder werken</li> <li>2. complexe delen van een expressie vervangen door 'plaatsvervangers' zodat herkenbare expressies ontstaan</li> </ol>
<b>O. Algebraïsche stappen om expressies te bewerken kunnen benoemen en afwegen</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. het vrijmaken van een variabele of expressie en daarmee verder werken</li> <li>2. inverteren van formules en elimineren van variabelen en expressies</li> <li>3. flexibel kunnen wisselen tussen betekenis toekennen aan symbolen en betekenisloos kunnen manipuleren</li> </ol>

Een indicatieve opsomming van activiteiten die een kandidaat moet kunnen uitvoeren, gekoppeld aan de genoemde specifieke vaardigheden.

<b>algebraïsche activiteit</b>
<b>categorie A: breukvormen</b>
1. $37,5 \cdot \frac{960}{x} + 180x = \frac{18000}{x} + 180x$
2. $\left(6,9 + \frac{298,5}{\frac{L}{T} \cdot 3600}\right) \cdot L = 6,9L + 0,083T$
3. $V = \frac{opp \cdot tijd \cdot \Delta Temp}{R} \rightarrow R = \dots$
4. $\frac{a}{b} \cdot M = \frac{c}{d} \rightarrow M = \dots$
5. $\frac{2q^2 - 8q + 16}{q} = 2q - 8 + \frac{16}{q}$
6. $\frac{3000}{t} \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right) \rightarrow \frac{3000t - 3000}{t^2}$
7. $\frac{60v}{k + \frac{v^2}{2a}} = \frac{120av}{2ak + v^2}$
8. $\frac{1300 - A}{A} = 44 \cdot 0,87^t \rightarrow A = \frac{1300}{1 + 44 \cdot 0,87^t}$
9. $\sqrt{1 - x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$
10. $\frac{3x + 7}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{a}{x + 2} + \frac{b}{x + 3} \rightarrow a = \dots$ en $b = \dots$
11. $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$

**categorie B: wortelvormen**

1.  $\frac{4^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}} - 3 = 0 \rightarrow t = \dots$

2.  $D = 6,9\sqrt{T - 12} \rightarrow T = \dots$

3.  $\sqrt{1-x} + \frac{x}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

4.  $x + \sqrt{8+x} = 4 \rightarrow x = \dots$

**categorie C: bijzondere producten**

1.  $(30 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 120x^2 + 900x$

2.  $a \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - a \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{4a}{n}$

3. Toon aan:  $\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 + 1 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$

4.  $\sin^4 t - \cos^4 t \rightarrow \sin^2 t - \cos^2 t$

**categorie D: regels voor exponenten en logaritmen**

1.  $1000 \cdot (0,1)^{0,05x} = 1000 \cdot g^x$  met  $g = \dots$

2.  $11000 \cdot 0,9^t \cdot (0,7 - 0,5 \cdot 0,9^{2t}) = 7700 \cdot 0,9^t - 5500 \cdot 0,9^{3t}$

3.  $g^4 = 1,82 \rightarrow g = 1,82^{0,25}$

4.  $G = 10 \cdot \log l + 90 \rightarrow l =$

5.  $\log G = 2 \cdot \log D + c \rightarrow G = 10^c \cdot D^2$

6.  $0,007 \cdot (8G)^{0,425} \cdot (2L)^{0,725} = 4 \cdot 0,007 \cdot G^{0,425} \cdot L^{0,725}$

7.  $P = 100 \cdot (1 - 2^{-ct})$  en  $P = 50 \rightarrow t = \dots$

8. 
$$\left. \begin{array}{l} S = \frac{1000}{R^3} \\ R = \sqrt{100+x^2} \end{array} \right\} \rightarrow S = 1000 \cdot (100+x^2)^{-1,5}$$

9.  $\sqrt[3]{1000x} \rightarrow 10x^{\frac{1}{3}}$

10.  $2000t^{-2} - 40000t^{-3} = 0 \rightarrow t = \dots$

11.  $\log y = a + b \cdot x \rightarrow y = 10^a \cdot (10^b)^x$

**categorie F: Herleidingen en omwerken van formules**

1. 
$$\left. \begin{array}{l} a - b = 178 \\ a - 0,36b = 205 \end{array} \right\} \rightarrow a = \dots \text{ en } b = \dots$$

2. 
$$\left. \begin{array}{l} V = R^3 \\ O = 6R^2 \end{array} \right\} \text{ Druk } O \text{ uit in } V \text{ en druk } V \text{ uit in } O$$

3.  $250 = c \cdot 250 \left(1 - \frac{250}{d}\right) + 250$  en  $c \neq 0 \rightarrow d = 250$

4.	$L \cdot B = 30$ $K = \frac{18547}{L} + 56,6L + \frac{5279}{B} + 90,8B$	} Druk $K$ uit in $L$
5.	$V = 87 - \frac{20}{M+0,05} \rightarrow M = \dots$	
6.	$K = 0,1A + 150$ en $A = \frac{1}{3}q^2 \rightarrow K = \frac{q^2}{30} + 150$	
7.	$3,5x - 5 = -4y + 40 \rightarrow y = -\frac{7}{8}x + \frac{45}{4}$	
8.	$H = \frac{6,7 \cdot I^{1,35}}{R} \rightarrow I = \dots$	
9.	$x\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} = (x+2)\sqrt{x+1}$	
10.	$\frac{y}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{x+1}{x} \rightarrow y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+9}$	
11.	$\sin^2 t = 1 + 2\cos t \rightarrow \cos t = \dots$	
<b>categorie G: vergelijkingen oplossen met behulp van algemene vormen</b>		
1.	$-q^2 + 2bq = 0 \rightarrow q = \dots$ of $q = \dots$	
2.	$\frac{(4x-1)3-(3x+1)(2x-1)}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x = \dots$ of $x = \dots$	
3.	$(4x^2 - 8)^3 (2x + 1) = 0 \rightarrow x = \dots$ of $x = \dots$ of $x = \dots$	
4.	Op $[0, 2\pi]$ : $2x \sin x = x\sqrt{3} \rightarrow x = 0 \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}$	

## Voorbeeldopgaven bij wiskunde B vwo

### Opgave 1

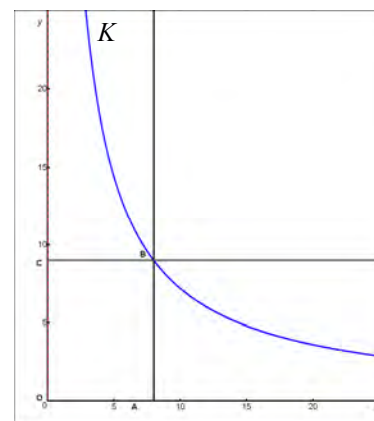
In een rechthoekig assenstelsel  $Oxy$  is  $OABC$  een variabele rechthoek. Punt  $B$  ligt op de kromme  $K$  en kan daarover bewegen. Onafhankelijk van de positie van punt  $B$  geldt dat  $OABC$  een rechthoek vormt met een constante oppervlakte 72.

$A$  ligt steeds op de positieve  $x$ -as en  $C$  op de positieve  $y$ -as.

a. Toon aan dat  $K$  de grafiek van  $y = \frac{72}{x}$  is.

De raaklijn in een punt  $B$  aan de kromme snijdt de  $x$ -as in punt  $D$  en de  $y$ -as in punt  $E$ .

b. Toon aan dat de oppervlakte van driehoek  $ODE$  niet afhangt van de positie van punt  $B$  op de kromme  $K$ .



## Opgave 2: Lantaarnpaal

Een straat wordt verlicht door straatlantaarns.  
De lichtintensiteit in een punt op de grond hangt af van de afstand tot de lamp en van de hoek die de lichtstralen maken met de grond:

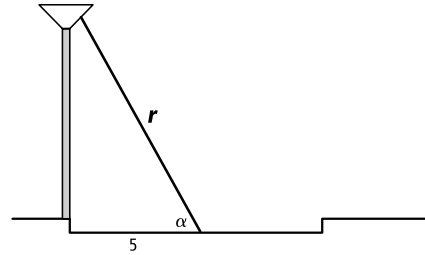
$$L = c \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \sin \alpha .$$

Hierin is  $L$  de lichtintensiteit,  $r$  de afstand tot de lamp (in m) en  $\alpha$  de hoek tussen de lichtstraal en de grond. In deze opgave wordt de constante  $c$  gelijk aan 1 gekozen, zodat de formule voor  $L$  wordt :

$$L = \frac{1}{r^2} \cdot \sin \alpha .$$

De straat is 10 meter breed. De vraag is hoe hoog de lamp boven de grond moet worden geplaatst, opdat de lichtintensiteit in het midden van de straat maximaal is.

- Druk voor het midden van de straat  $\sin \alpha$  uit in  $r$ .
- Toon aan dat voor een punt in het midden van de straat geldt :  $L^2 = \frac{1}{r^4} - \frac{25}{r^6}$ .
- Bereken exact voor welke waarde van  $r$  de maximale waarde voor  $L^2$  wordt bereikt.



## Opgave 3: Een rij van logaritmische functies

Voor  $k = 2, 3, 4, \dots$  en voor  $x > 0$  zijn gegeven de functies

$$f_k(x) = {}^k \log x .$$

De lijn  $x = e$  snijdt de  $x$ -as in het punt  $E$  en de grafiek van  $f_k$  in het punt  $P_k$

In de figuur hiernaast zie je de grafieken van  $f_2, f_3$  en  $f_4$  en daarop de punten  $P_2, P_3$  en  $P_4$

In de punten  $P_2, P_3$  en  $P_4, \dots$  worden de raaklijnen aan de grafieken van  $f_2, f_3$  en  $f_4, \dots$  getekend.

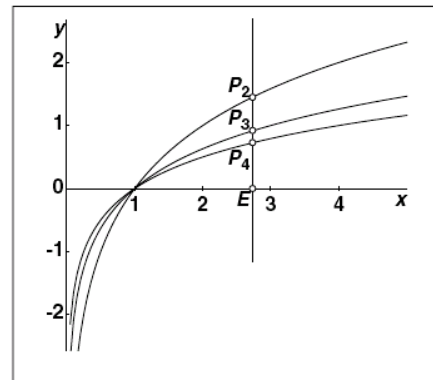
- Bewijs dat al deze raaklijnen door het punt  $(0,0)$  gaan.

Het midden van lijnstuk  $EP_k$  noemen we  $M_k$

Zo ontstaat de rij van middens  $M_2, M_3, M_4, \dots$

De figuur suggereert dat  $M_2$  hetzelfde punt zou kunnen zijn als punt  $P_4$

- Toon aan dat elk van de middens  $M_2, M_3, M_4, \dots$  op de grafiek van een functie  $f_k$  ligt.



## Opgave 4:

Bekijk het gebied in het  $Oxy$ -vlak dat wordt begrensd door de  $x$ -as, de lijnen  $x=a$  en  $x=b$  (met  $0 < a < b$ ) en de kromme met vergelijking  $xy = 1$ .

De lijn  $x = m$  verdeelt dit gebied in twee delen met gelijke oppervlakte.

- > Bewijs dat geldt:  $m = \sqrt{a \cdot b}$

## Opgave 5:

De functie  $f$  is voor iedere reële  $x \neq 0$  gegeven door  $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{x}{e^{x-1}}$

Als je de grafiek maakt met de GR dan lijkt het erop dat zij symmetrisch is ten opzichte van de  $y$ -as.

- > Bewijs dat dit inderdaad het geval is.

### Opgave 6:

De functie  $f$  is voor iedere reële  $x$  gegeven door  $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

Maak op de GR de grafiek van de functie  $y = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) + 1$

> Wat voor bijzonders constateer je? Verklaar dit met behulp van algebra.

### Opgave 7

Op de parabool  $y = x^2$  liggen de punten  $A(a, a^2)$  en  $B(b, b^2)$ . Het vlakdeel dat wordt begrensd door de koorde  $AB$  en de parabool noemt men een paraboolsegment.

Stel  $a > b$ .

> Toon aan dat de oppervlakte van dit paraboolsegment gelijk is aan  $\frac{1}{6}(a - b)^3$

### Opgave 8 Een periodieke beweging

Een punt beweegt in het Oxy-vlak volgens de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos 2t \end{cases}$$

Als je de baan op het scherm van de GR bekijkt, dan lijkt het of de beschreven baan een parabool is.

> Toon aan dat dit inderdaad het geval is.

### Opgave 9 (uit het examen VB1 2005 tijdvak 2, de vragen 9 en 11)

De totale reistijd  $T$  van een retourtocht wordt gegeven door  $T = \frac{10}{20+v} + \frac{10}{20-v}$

Hierbij is  $T$  de tijd in uren en  $v$  de stroomsnelheid van de rivier in km/u, met  $0 < v < 20$ . Als de stroomsnelheid van de rivier groter wordt, neemt de totale reistijd van een retourtocht toe.

a. Toon dit algebraïsch aan.

Veronderstel dat  $v$  varieert tussen 0 en 10 km/u en dat alle waarden van 0 tot en met 10 even vaak voorkomen. Je kunt dan de gemiddelde reistijd met een integraal uitrekenen.

b. Toon langs algebraïsche weg aan dat de gemiddelde reistijd gelijk is aan ln 3 uur.

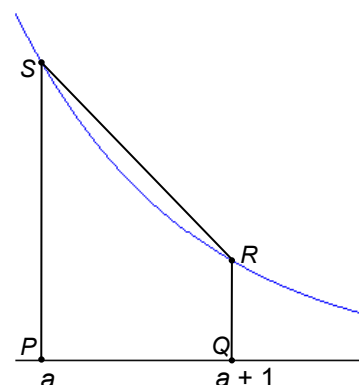
### Opgave 10 (uit het examen VB1,2 2005 tijdvak 2, vraag 14)

Gegeven is de functie  $f(x) = e^{-x}$ .

De lijn  $x = a$  snijdt de  $x$ -as in  $P$  en de grafiek van  $f$  in  $S$ , de lijn  $x = a + 1$  snijdt de  $x$ -as in  $Q$  en de grafiek van  $f$  in  $R$ . Het gebied begrensd door de grafiek van  $f$  en de lijnstukken  $PS$ ,  $PQ$  en  $QR$  noemen we  $V$ .

Het trapezium  $PQRS$  noemen we  $W$ . Zie de figuur hiernaast.

> Toon aan dat de verhouding  $\frac{\text{oppervlakte van } W}{\text{oppervlakte van } V}$  onafhankelijk is van  $a$ .



## 5. Het centraal examen

### Zittingen centraal examen

Het centraal examen wordt afgenomen in één zitting van drie uur.

### Vakspecifieke regels correctievoorschrift

Voor wiskunde B zijn de volgende vakspecifieke regels vastgesteld:

- 1 Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt één punt afgetrokken tot het maximum van het aantal punten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.
- 2 De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de Grafische rekenmachine (GR) gebruiken. Bij de betreffende vragen doen de kandidaten er verslag van hoe zij de GR gebruiken.

### Hulpmiddelen

Bij het examen is naast het basispakket hulpmiddelen toegestaan het gebruik van:

- formulekaart (zie bijlage 3; kandidaten hoeven deze niet mee te nemen, de lijst wordt op het examen afgedrukt)
- grafische rekenmachine
- roosterpapier in  $\text{cm}^2$ .

Bij het centraal examen is naast het basispakket hulpmiddelen het gebruik toegestaan van een grafische rekenmachine van een type dat door de CEVO is goedgekeurd.

# Bijlage 1. Examenprogramma Wiskunde B vwo

## Het eindexamen

Het eindexamen bestaat uit het centraal examen en het schoolexamen.

Het examenprogramma bestaat uit de volgende domeinen:

Domein A Vaardigheden  
Domein Bg Functies en grafieken  
Domein Cg Discrete analyse  
Domein Bb Differentiaal- en integraalrekening  
Domein Db Goniometrische functies  
Domein Gb Voortgezette meetkunde  
Domein F Keuzeonderwerpen.

Het centraal examen

Het centraal examen heeft betrekking op de subdomeinen A5, Bg1, Bg2, Cg1, Bb1, Bb2, Bb3, Db1, Gb1 en Gb2, in combinatie met de vaardigheden uit subdomeinen A1, A2 en A3.

De CEVO stelt het aantal en de tijdsduur van de zittingen van het centraal examen vast.

De CEVO maakt indien nodig een specificatie bekend van de examenstof van het centraal examen.

Het schoolexamen

Het schoolexamen heeft betrekking op domein A in combinatie met:

- de domeinen Bb, Db en Gb;
- het domein F, met dien verstande dat deze onderwerpen per kandidaat kunnen verschillen;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: een of meer van de overige domeinen of subdomeinen;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: andere vakonderdelen, die per kandidaat kunnen verschillen.

## De examenstof

Domein A: Vaardigheden

### Subdomein A1: Informatievaardigheden

1. De kandidaat kan, mede met behulp van ICT, informatie verwerven, selecteren, verwerken, beoordelen en presenteren.

### Subdomein A2: Onderzoeksvaardigheden

2. De kandidaat kan een gegeven probleemsituatie inventariseren, vertalen in een wiskundig model, binnen dat model wiskundige oplostechieken hanteren en de gevonden oplossingen betekenis geven in de context.

### Subdomein A3: Technisch-instrumentele vaardigheden

3. De kandidaat kan bij raadplegen, verkennen en presenteren van wiskundige informatie en bij uitvoeren van wiskundige bewerkingen en redeneringen gebruik maken van toepassingen van ICT.

### Subdomein A4: Oriëntatie op studie en beroep

4. De kandidaat kan een verband leggen tussen zijn wiskundige kennis, vaardigheden en belangstelling en de rol van wiskunde in vervolgstudies en de praktijk van verschillende beroepen.

### Subdomein A5: Algebraïsche vaardigheden

5. De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige en algebraïsche vaardigheden en formules, heeft daar inzicht in en kan de bewerkingen uitvoeren met, maar ook zonder, gebruik van ICT-middelen zoals de grafische rekenmachine.

Domein Bg: Functies en grafieken

**Subdomein Bg1: Standaardfuncties**

6. De kandidaat kan grafieken tekenen en herkennen van machtsfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies en goniometrische functies en van die verschillende typen functies de karakteristieke eigenschappen benoemen.

**Subdomein Bg2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden**

7. De kandidaat kan functievoorschriften opstellen, bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen en vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met behulp van numerieke, grafische en algebraïsche methoden.

Domein Cg: Discrete analyse

**Subdomein Cg1: Veranderingen**

8. De kandidaat kan het veranderingsgedrag van grafieken en functies relateren aan differentiequotiënten, toenamendiagrammen, hellinggrafieken en contexten.

Domein Bb: Differentiaal- en integraalrekening

**Subdomein Bb1: Afgeleide functies**

9. De kandidaat kan het differentiaalquotiënt en de eerste en tweede afgeleide gebruiken om een functie te onderzoeken en om een contextprobleem op te lossen.

**Subdomein Bb2: Algebraïsche technieken**

10. De kandidaat kan afgeleide functies bepalen met behulp van regels voor het differentiëren en algebraïsche technieken hanteren.

**Subdomein Bb3: Integraalrekening**

11. De kandidaat kan in geschikte toepassingen een bepaalde integraal opstellen en exact berekenen, en met behulp van ICT benaderen.

Domein Db: Goniometrische functies

**Subdomein Db1: Goniometrische functies**

12. De kandidaat kan bij periodieke verschijnselen, met name trillingspatronen en harmonische bewegingen, formules opstellen, herleiden en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen en vergelijkingen oplossen.

Domein Gb: Voortgezette meetkunde

**Subdomein Gb1: Oriëntatie op bewijzen**

13. De kandidaat kan definities, vermoedens, stellingen en bewijzen onderscheiden, meetkundige situaties exploreren, een vermoeden of te bewijzen stelling formuleren en bewijzen of weerleggen.

**Subdomein Gb2: Constructie en bewijzen in de vlakke meetkunde**

14. De kandidaat kan constructies uitvoeren en bewijzen geven.

Domein F: Keuzeonderwerpen

## Bijlage 2. Algebra in het vwo; het onderscheid tussen A, B en C

### Vooraf

Voor de invoering van de profielen, waarbij wiskunde A1 en A1,2 en wiskunde B1 en B1,2 profielvakken werden, was duidelijk dat de manier waarop algebra werd aangeboden bij wiskunde B anders was dan bij wiskunde A.

Bij de invoering van de profielen is een flink deel van de algebra (de domeinen Bg: Functies en grafieken en Cg: Discrete analyse) terechtgekomen in het gemeenschappelijke programma. Hierdoor - maar ook mede door de beschikbaarheid van de grafische rekenmachine en de formulekaart - zijn de grenzen tussen wiskunde A1(,2) en B1(,2) vervaagd ten aanzien van algebraïsche vaardigheden. Bij het formuleren van de nieuwe programma's voor 2007, waarbij ook het 'aparte' vak wiskunde C zijn intrede doet, hebben alle CEVO-commissies de behoefte uitgesproken om met name op het gebied van de algebra de verschillen tussen de drie vakken scherper te omschrijven. Er zijn daarvoor twee argumenten:

- docenten (en leerlingen) moeten een helder beeld hebben van de eisen die per vak worden gesteld aan het beheersen van algebraïsche vaardigheden,
- het vervolgonderwijs moet duidelijk worden gemaakt op welke vaardigheden mag worden gerekend, gegeven de beperkte tijd die beschikbaar is voor het wiskundeonderwijs.

De nadere specificaties voor elk van de drie vakken zijn te vinden in hoofdstuk 3 van de betreffende syllabus.

In deze bijlage worden de verschillen in algemene zin belicht.

### Algebra: specifieke en algemene vaardigheden

Binnen de commissies A, B en C is gesproken over algebra aan de hand van een opsomming in termen van kennis, vaardigheden en inzicht.

In een later stadium is dit gewijzigd in de termen *specifieke vaardigheden* en *algemene vaardigheden*. In het volgende wordt gepoogd deze twee begrippen te verduidelijken en ook aan te geven op welke manier deze twee soorten vaardigheden een plaats krijgen binnen de drie vakken.

De volgende metafoor kan dienen om de verschillen tussen de A-, B- en C-leerlingen te typeren ten aanzien van het beheersingsniveau van vaardigheden.

In de schaakwereld heb je in de eerste plaats de professionele spelers. Zij worden geacht de tactiek en techniek van het schaakspel volledig te beheersen. Zij trainen op kennis (wat zijn de spelregels?; welke openingen zijn er?), vaardigheden (hoe speel je een bepaald eindspel uit?) en metacognitieve vaardigheden (welke openingen beheers ik goed en welke niet?; waar liggen mijn sterke punten?). Daarnaast ontwikkelen ze strategisch inzicht (wat is een veelbelovende situatie?). Hierbij speelt organisatie van je kennis en vaardigheden een rol. Naast deze spelers zijn er scheidsrechters (of de sportverslaggevers). Zij kennen de spelregels. Zij hebben, door ervaring, ook enige kennis en vaardigheden m.b.t. het spel. Zij begrijpen het spel, kunnen met de spelers een aantal stappen volgen, de wedstrijden analyseren, kunnen de denkstappen van de spelers waarderen en kunnen een beperkt aantal stappen vooruit denken in een gegeven situatie. Deze scheidsrechters (of verslaggevers) hebben niet de kennis en vaardigheden om, zoals de spelers, zelf een partij op niveau te organiseren.

Dan zijn er de geïnteresseerde toeschouwers. Ze moeten de spelregels kennen en begrijpen maar hebben niet de kennis en vaardigheid om zelf op dat niveau te spelen. Dat hoeft ook niet. Wel hebben zij waardering voor het spel en kunnen zij onderscheiden of er een goede prestatie geleverd wordt of niet en zijn ze in staat om een veelbelovende volgende zet te bedenken.

In het vwo zijn er m.b.t. algebra ook drie groepen.

De spelers zijn de wiskunde B groepen die het wiskundespel moeten beheersen, zowel voor wat betreft de kennis en vaardigheden (incl. de metacognitieve) als voor wat betreft de organisatie hiervan. De kennis en vaardigheden noemen we de **specifieke algebraïsche vaardigheden**.

De organisatie van kennis en vaardigheden heeft te maken met het inzicht om op de juiste momenten de gewenste specifieke algebraïsche vaardigheden in te zetten. Dit heeft te maken met *strategisch inzicht*: Wat is een veelbelovende volgende zet? Hoe kan ik de dan ontstane situatie beoordelen op zijn bruikbaarheid? Dit noemen we de **algemene algebraïsche vaardigheden**

De wiskunde A groep wordt gevormd door de scheidsrechters/sportverslaggevers. Zij beschikken niet over het strategisch inzicht van de spelers, maar kunnen de spelers wel volgen als deze hun strategisch gedrag uitleggen. Ook kunnen zij wel controleren of een zet toegestaan is. In meer eenvoudige situaties kunnen zij enkele tussenstappen bedenken om een bepaald geformuleerd einddoel te behalen.

De wiskunde C groep vormen de toeschouwers. Zij kijken naar echte wedstrijden. Zij hebben waardering voor het spel en kennen en begrijpen de spelregels, maar bezitten niet de techniek en tactiek om ver vooruit te denken. Ze kunnen wel kritisch bezien of een zet veelbelovend is of niet.

Drie voorbeelden die zijn bedoeld om het bovenstaande te illustreren.

**Vb 1: Zoek waarden voor  $x$  en  $y$  die voldoen aan de volgende eisen:  
 $x \cdot y = 10$  en  $x + 2y = 9$**

Een wi B leerling moet hier zijn eigen strategie kunnen bepalen en uitvoeren om tot de oplossing te komen.

Een wi A leerling moet met de hint 'kun je hieruit een vergelijking vinden met maar één onbekende?' tot de oplossing kunnen komen.

Een wi C leerling moet kunnen controleren dat  $x = 4$  met  $y = 2,5$  en  $x = 5$  met  $y = 2$  de oplossingen zijn en kan een uitleg volgen om tot die oplossing te komen.

**Vb 2: Gegeven is de formule  $G = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) + 130$ . Hoe verandert de waarde van  $G$  als  $I$  twee keer zo groot wordt? Bewijs je uitspraak.**

Een wi B leerling moet hiermee uit de voeten kunnen.

Ook een wi A leerling zou dit moeten kunnen, eventueel met tussenvragen: Toon aan dat de formule ook te schrijven is als  $G = 10 \cdot \log(I) - 10 \cdot \log(I_0) + 130$ , of Toon aan dat  $G$  altijd ongeveer 3 groter wordt als  $I$  verdubbelt.

Een wi C leerling zal op het spoor gezet moeten worden om  $2I$  in de formule in te vullen in plaats van  $I$ . Dit kan door naar getallenvoorbeelden te vragen en daarna expliciet te vragen naar een generalisatie.

**Vb 3: Voor de verdubbelingstijd bij exponentiële processen wordt vaak als vuistregel gebruikt:**

$$T = \frac{70}{p}, \text{ waarbij } p \text{ het groeipercentage per jaar is en } T \text{ de verdubbelingstijd in jaren.}$$

**Onderzoek voor welke waarden van  $p$  deze benadering minder dan 1 jaar afwijkt van de werkelijke waarde van de verdubbelingstijd.**

Een wi B leerling moet hiermee zelfstandig uit de voeten kunnen.

Voor een wi A leerling zijn er tussenstappen nodig. Bijvoorbeeld: de werkelijke  $T$  kan berekend worden met de formule  $T = \frac{\log 2}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$ ; stel nu een verschilfunctie op tussen de  $T$  uit de vuistregel en de werkelijke  $T$ .

Een wi C leerling zou eerst gevraagd kunnen worden een tabel te maken met daarin voor gehele waarden van  $p$  de werkelijke verdubbelingstijd en die van de vuistregel. Naar aanleiding van deze tabel kunnen dan conclusies getrokken worden.

Bij dit laatste voorbeeld wordt overgeschakeld op een andere representatie van een functie, namelijk de tabel. Dit gebeurt in de onderbouw van het vwo veel en is een nadrukkelijk leerdoel daar. De strategie 'welke representatie van een functie kies ik?' zal zeker bij wiskunde C, maar ook bij wiskunde A een rol moeten spelen. Bij wiskunde B lijkt het voornamelijk van belang het herschrijven van analytische representaties.

Het kiezen van een handige representatie is slechts één van de problemen die zich voordoen bij het manipuleren van formules. Andere problemen, waar je weer de *algemene algebraïsche vaardigheden* ten dele in terugziet:

- schakelen tussen verschillende representaties (grafiek, formule, tabel, verbaal)
- schakelen tussen (reken)procedure en object (wat is  $\sqrt{2}$ ,  ${}^2\log 5$ ,  $x^2+5x$ )
- schakelen tussen betekenis geven aan symbolen en betekenisloos manipuleren volgens algebraïsche regels
- schakelen tussen lokaal en globaal, zowel in een formule als in een aantal stappen van een berekening

### **Samenvattend**

Bij de drie vakken wiskunde A, B en C spelen zowel specifieke- als algemene vaardigheden op het gebied van algebra een rol.

De *specifieke vaardigheden* omvatten kenniselementen (zoals regels voor breuken, machten, logaritmen en wortels) en manipulatievaardigheden (zoals het kunnen omwerken van expressies en het oplossen van vergelijkingen).

De mate waarin en het niveau waarop deze specifieke vaardigheden worden beheerst verschillen voor A, B en C.

De *algemene vaardigheden* worden in drie groepen gedeeld:

- kwalitatief redeneren
- substitutie en reductie
- algebraïsche stappen om expressies te bewerken kunnen benoemen en afwegen

Bij wiskunde B komen de drie groepen aan bod.

Voor wiskunde A vervalt de laatste groep, terwijl bij wiskunde C alleen het kwalitatief redeneren wordt genoemd (structuur van een formule doorzien, gedrag van een expressie globaal en lokaal kwalitatief beschrijven)

### **Algebra en de Grafische Rekenmachine**

Zoals in de verschillende syllabi wordt aangeduid voor het betreffende vak, kan er ook nog op een wat andere manier tegen de algebraïsche vaardigheden worden aangekeken. Een onderscheid tussen wiskunde B enerzijds en wiskunde A en C anderzijds komt ook tot uitdrukking in het type opgaven in een examen.

Bij wiskunde A en C is het wiskundegereedschap bedoeld om contextproblemen mee te analyseren en op te lossen.

Omdat in toepassingen veelal met benaderende waarden (van grootheden) wordt gewerkt, ligt het niet voor de hand om exacte antwoorden te eisen. In veel gevallen zal de GR daarbij zinvol kunnen worden ingezet.

Bij wiskunde B daarentegen zullen zeker ook meer abstracte vraagstukken voorkomen die met behulp van algebra moeten worden geanalyseerd of waarvoor een algebraïsch bewijs moet worden geleverd. Daarbij speelt de GR geen rol.

## Bijlage 3. Lijst van formules en verwijzingen naar definities/stellingen die in het examen wordt opgenomen

### Vlakke meetkunde

*Verwijzingen naar definities en stellingen die bij een bewijs mogen worden gebruikt zonder nadere toelichting.*

#### Hoeken, lijnen en afstanden:

gestrekte hoek, rechte hoek, overstaande hoeken, F-hoeken, Z-hoeken, afstand punt tot lijn, driehoeksongelijkheid.

#### Meetkundige plaatsen:

middelloodlijn, bissectrice, bissectricepaar, middenparallel, cirkel, parabool.

#### Driehoeken:

hoekensom driehoek, buitenhoek driehoek, congruentie: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR; gelijkvormigheid: hh, zhz, zzz, zzr; middelloodlijnen driehoek, bissectrices driehoek, hoogtelijn driehoek, hoogtelijnen driehoek, zwaartelijn driehoek, zwaartelijnen driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, rechthoekige driehoek, Pythagoras, gelijkbenige rechthoekige driehoek, halve gelijkzijdige driehoek.

#### Vierhoeken:

hoekensom vierhoek, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.

#### Cirkel, koorden, bogen, hoeken, raaklijn, vierhoeken:

koorde, boog en koorde, loodlijn op koorde, middellijn, Thales, middelpuntshoek, omtrekshoek, constante hoek, raaklijn, hoek tussen koorde en raaklijn, koordenvierhoek.

### Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$

$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$

$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$

$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin t + \sin u = 2 \sin \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$$

$$\sin t - \sin u = 2 \sin \frac{t-u}{2} \cos \frac{t+u}{2}$$

$$\cos t + \cos u = 2 \cos \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$$

$$\cos t - \cos u = -2 \sin \frac{t+u}{2} \sin \frac{t-u}{2}$$

## Bijlage 4. Lijst van definities/stellingen behorend bij de verwijzingen in bijlage 3

De opsomming van verwijzingen zoals die in het examen is vermeld op bladzijde 2 voor de vlakke meetkunde, heeft betrekking op de volgende lijst van definities en stellingen. Deze lijst mag bij het examen niet gebruikt worden.

Bij het examen mag bij een bewijsvoering verwezen worden naar een definitie of stelling door het noemen van de korte typering die in de volgende lijst cursief en onderstreept is aangegeven bij elk van de gegeven definities en stellingen.

### ***Hoeken, lijnen en afstanden***

<p><b>Hoeken</b></p> <p>Een gestrekte hoek is een hoek waarvan de benen in het verlengde van elkaar liggen. (definitie <u>gestrekte hoek</u>)</p> <p>De grootte van een gestrekte hoek is <math>180^\circ</math>. (grootte <u>gestrekte hoek</u>)</p> <p>Een rechte hoek is de helft van een gestrekte hoek. (definitie <u>rechte hoek</u>)</p> <p>De grootte van een rechte hoek is <math>90^\circ</math>. (grootte <u>rechte hoek</u>)</p>
<p><b>Hoeken en lijnen</b></p> <p>De overstaande hoeken bij twee snijdende lijnen zijn even groot. (stelling <u>overstaande hoeken</u>)</p> <p>Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn F-hoeken even groot en Z-hoeken even groot. (stelling <u>F-hoeken</u> ,stelling <u>Z-hoeken</u>)</p> <p>Als er bij twee lijnen die gesneden worden door een derde lijn een paar even grote F-hoeken of Z-hoeken optreedt, dan zijn die twee lijnen evenwijdig. (stelling <u>F-hoeken</u> ,stelling <u>Z-hoeken</u>)</p>
<p><b>Afstanden</b></p> <p>De afstand (kortste verbinding) van een punt tot een lijn is de lengte van het loodlijnstuk neergelaten vanuit dat punt op die lijn. (definitie <u>afstand punt tot lijn</u>)</p> <p>Als drie punten <math>A</math>, <math>B</math> en <math>C</math> niet op één lijn liggen, dan geldt: <math>AB + BC &gt; AC</math>. (stelling <u>driehoeksongelijkheid</u>)</p>

### ***Meetkundige plaatsen***

<p><b>Middelloodlijn</b></p> <p>De middelloodlijn van een lijnstuk is de lijn die het lijnstuk loodrecht middendoor snijdt. (definitie <u>middelloodlijn</u>)</p> <p>De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee gegeven punten <math>A</math> en <math>B</math> is de middelloodlijn van het lijnstuk <math>AB</math>. (stelling <u>middelloodlijn</u>)</p>
<p><b>Bissectrice (deellijn)</b></p> <p>De bissectrice (deellijn) van een hoek is de halve lijn die de hoek middendoor deelt. (definitie <u>bissectrice</u>)</p> <p>De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee elkaar snijdende lijnen, is het bissectricepaar (deellijnenpaar) van die twee lijnen. (stelling <u>bissectricepaar</u>)</p>

### **Middenparallel van twee evenwijdige lijnen**

De middenparallel van twee evenwijdige lijnen is de lijn die evenwijdig aan de twee lijnen is en midden tussen deze lijnen ligt. (definitie middenparallel)

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee evenwijdige lijnen, is de middenparallel van dat lijnenpaar. (stelling middenparallel)

### **Cirkel**

Een cirkel met middelpunt  $M$  en straal  $r$  is de verzameling van alle punten die afstand  $r$  tot het punt  $M$  hebben. (definitie cirke)

### **Parabool**

Een parabool met brandpunt  $F$  en richtlijn  $l$  ( $F$  niet op  $l$ ) is de verzameling van alle punten die gelijke afstanden hebben tot punt  $F$  en lijn  $l$ . (definitie parabool)

## **Driehoeken**

### **Hoekensom**

De som van de hoeken van een driehoek is  $180^\circ$ . (stelling hoekensom driehoek)

Een buitenhoek van een driehoek is gelijk aan de som van de twee niet-aanliggende binnenhoeken. (stelling buitenhoek driehoek)

### **Congruente (gelijke) driehoeken**

Twee driehoeken zijn congruent (gelijk) als ze gelijk hebben:

- een zijde en twee aanliggende hoeken. (HZH)
- een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek. (ZHH)
- twee zijden en de ingesloten hoek. (ZHZ)
- alle zijden. (ZZZ)
- twee zijden en de rechte hoek tegenover één van die zijden. (ZZR)

### **Gelijkvormige driehoeken**

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben:

- twee hoeken. (hh)
- een hoek en de verhouding van de omliggende zijden. (zhz)
- de verhouding van de zijden. (zzz)
- een rechte hoek en de verhouding van twee niet-omliggende zijden. (zzr)

### **Lijnen door één punt**

De middelloodlijnen van (de zijden van) een driehoek snijden elkaar in één punt. (stelling middelloodlijnen driehoek)

De bissectrices (deellijnen) van (de hoeken van) een driehoek snijden elkaar in één punt. (stelling bissectrices driehoek)

Een hoogtelijn van een driehoek is de lijn door een hoekpunt van de driehoek die de lijn door de tegenoverliggende zijde loodrecht snijdt. (definitie hoogtelijn driehoek)

De hoogtelijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt. (stelling hoogtelijnen driehoek)

Een zwaartelij van een driehoek is de lijn door een hoekpunt van de driehoek die door het midden van de tegenoverliggende zijde gaat. (definitie zwaartelij driehoek )

De zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt dat de zwaartelijnen in de verhouding 1 : 2 verdeelt. (stelling zwaartelijnen driehoek)

### **Gelijkbenige driehoek**

Een gelijkbenige driehoek is een driehoek met (minstens) twee even lange zijden. (definitie gelijkbenige driehoek)

In een gelijkbenige driehoek zijn de hoeken tegenover de even lange zijden even groot. (stelling gelijkbenige driehoek)

Als in een driehoek twee hoeken even groot zijn, dan zijn de tegenoverliggende zijden even lang. (stelling gelijkbenige driehoek)

### **Gelijkzijdige driehoek**

Een gelijkzijdige driehoek is een driehoek met drie even lange zijden. (definitie gelijkzijdige driehoek)

In een gelijkzijdige driehoek zijn alle drie de hoeken even groot ( $60^\circ$ ). (stelling gelijkzijdige driehoek)

Als een driehoek drie even grote hoeken (van  $60^\circ$ ) heeft, dan is de driehoek gelijkzijdig. (stelling gelijkzijdige driehoek)

### **Rechthoekige driehoek**

Een rechthoekige driehoek is een driehoek met een rechte hoek. (definitie rechthoekige driehoek)

In een rechthoekige driehoek is de som van de kwadraten van de omliggende zijden van de rechte hoek gelijk aan het kwadraat van de zijde tegenover de rechte hoek. (stelling van Pythagoras)

Als in een driehoek de som van de kwadraten van twee zijden gelijk is aan het kwadraat van de derde zijde, dan is de driehoek rechthoekig (omgekeerde stelling van Pythagoras)

In een rechthoekige driehoek is het lijnstuk dat het hoekpunt van de rechte hoek verbindt met het midden van de tegenoverliggende zijde gelijk aan de helft van die zijde. (stelling rechthoekige driehoek)

### **Bijzondere rechthoekige driehoeken**

Van een gelijkbenige rechthoekige driehoek zijn beide scherpe hoeken  $45^\circ$ . (stelling gelijkbenige rechthoekige driehoek)

De zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek verhouden zich als  $1 : 1 : \sqrt{2}$ . (stelling gelijkbenige rechthoekige driehoek)

De zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken  $30^\circ$  en  $60^\circ$  zijn, verhouden zich als  $1 : 2 : \sqrt{3}$ . (stelling halve gelijkzijdige driehoek)

## **Vierhoeken**

### **Hoekensom**

De som van de hoeken van een vierhoek is  $360^\circ$ . (stelling hoekensom vierhoek)

### **Parallelogram**

Een parallelogram is een vierhoek met twee paren evenwijdige zijden. (definitie parallelogram)

In een parallelogram zijn de overstaande zijden even lang. (stelling parallelogram)

Als een vierhoek twee paren even lange overstaande zijden heeft, dan is de vierhoek een parallelogram. (stelling parallelogram)

Als een vierhoek twee overstaande zijden heeft die even lang en evenwijdig zijn, dan is de vierhoek een parallellogram. (stelling parallellogram)

In een parallellogram zijn de overstaande hoeken even groot. (stelling parallellogram)

Als in een vierhoek de twee paren overstaande hoeken even groot zijn, dan is de vierhoek een parallellogram. (stelling parallellogram)

In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor. (stelling parallellogram)

Als in een vierhoek de diagonalen elkaar middendoor delen, dan is de vierhoek een parallellogram. (stelling parallellogram)

### **Ruit**

Een ruit is een vierhoek met vier even lange zijden. (definitie ruit)

Een ruit is tevens parallellogram. (stelling ruit)

In een ruit delen de diagonalen de hoeken middendoor. (stelling ruit)

Als in een parallellogram een diagonaal een hoek middendoor deelt, dan is het parallellogram een ruit. (stelling ruit)

In een ruit snijden de diagonalen elkaar loodrecht. (stelling ruit)

Als in een parallellogram de diagonalen elkaar loodrecht snijden, dan is het parallellogram een ruit. (stelling ruit)

### **Rechthoek**

Een rechthoek is een vierhoek met vier rechte hoeken. (definitie rechthoek)

Een rechthoek is tevens parallellogram. (stelling rechthoek)

Als in een parallellogram een hoek recht is, dan is het parallellogram een rechthoek. (stelling rechthoek)

In een rechthoek zijn de diagonalen even lang. (stelling rechthoek)

Als in een parallellogram de diagonalen even lang zijn, dan is het parallellogram een rechthoek. (stelling rechthoek)

### **Vierkant**

Een vierkant is een ruit die tevens rechthoek is. (definitie vierkant)

## **Cirkel, koorden, bogen, hoeken, raaklijn, vierhoeken**

### **Koorde**

Een koorde van een cirkel is een lijnstuk waarvan de eindpunten op de cirkel liggen. (definitie koorde)

In een cirkel behoren gelijke bogen bij gelijke koorden. (stelling boog en koorde)

De loodlijn vanuit het middelpunt van een cirkel op een koorde deelt die koorde middendoor. (stelling loodlijn op koorde)

### **Middellijn en rechte hoek**

Een middellijn van een cirkel is een koorde die door het middelpunt gaat. (definitie middellijn)

Als  $C$  op de cirkel met middellijn  $AB$  ligt, dan is hoek  $ACB$  recht. (stelling van Thales)

Als hoek  $C$  in driehoek  $ABC$  recht is, dan ligt  $C$  op de cirkel met middellijn  $AB$ . (omgekeerde stelling van Thales)

### **Middelpuntshoek en omtrekshoek**

Een middelpuntshoek van een cirkel is een hoek waarvan het hoekpunt het middelpunt van de cirkel is. (definitie middelpuntshoek)

Een omtrekshoek van een cirkel is een hoek waarvan het hoekpunt op de cirkel ligt en de benen de cirkel snijden. (definitie omtrekshoek)

Een omtrekshoek is gelijk aan de helft van de middelpuntshoek die dezelfde koorde insluit als die omtrekshoek. (stelling van de omtrekshoek)

Als punt  $C$  over een cirkelboog  $AB$  tussen de punten  $A$  en  $B$  beweegt, dan verandert de grootte van de omtrekshoek  $ACB$  niet. (stelling van de constante hoek)

Als punt  $D$  aan dezelfde kant van  $AB$  ligt als punt  $C$  en de hoeken  $ADB$  en  $ACB$  zijn even groot, dan liggen  $C$  en  $D$  op dezelfde cirkelboog  $AB$  (omgekeerde stelling van de constante hoek)

### **Raaklijn en hoeken**

Een raaklijn aan een cirkel is een lijn die één punt met de cirkel gemeen heeft. (definitie raaklijn)

De hoek tussen een raaklijn aan een cirkel en een koorde van die cirkel waarvan een eindpunt het raakpunt is, is even groot als de bij die koorde behorende omtrekshoek. (stelling hoek tussen koorde en raaklijn)

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindinglijn van het middelpunt van de cirkel en het raakpunt. (stelling raaklijn)

### **Koorden vierhoek**

Een koorden vierhoek is een vierhoek waarbij een cirkel bestaat die door de hoekpunten van de vierhoek gaat. (definitie koorden vierhoek)

De som van een paar overstaande hoeken van een koorden vierhoek is  $180^\circ$ . (stelling koorden vierhoek)

Als de som van een paar overstaande hoeken van een vierhoek  $180^\circ$  is, dan is de vierhoek een koorden vierhoek. (omgekeerde stelling koorden vierhoek)